



KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA
2024

Matematika

Edisi Revisi

Dicky Susanto, dkk

SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI

Hak Cipta pada Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia
Dilindungi Undang-Undang

Penafian: Buku ini disiapkan oleh Pemerintah dalam rangka pemenuhan kebutuhan buku pendidikan yang bermutu, murah, dan merata sesuai dengan amanat dalam UU No. 3 Tahun 2017. Buku ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi. Buku ini merupakan dokumen hidup yang senantiasa diperbaiki, diperbarui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis atau melalui alamat surel buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI (Edisi Revisi)

Penulis

Dicky Susanto
Savitri K. Sihombing
Marianna Magdalena Radjawane
Yulian Candra
Daniel Sinambela

Penelaah

Widowati
Ali Mahmudi

Penyelia/Penyelaras

Supriyatno
Lenny Puspita Ekawaty
Maharani Prananingrum

Kontributor

Ali Murtandho
Hardiyanto

Ilustrator

Ahmad Sa'ad Ibrahim

Editor

Tri Hartini
Maharani Prananingrum

Editor Visual

Nadia Mahatmi

Desainer

M. Firdaus Jubaedi

Penerbit

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi

Dikeluarkan oleh

Pusat Perbukuan Kompleks Kemdikbudristek
Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
<https://buku.kemdikbud.go.id>

Edisi Revisi, 2024

978-623-118-557-0 (no.jil.lengkap)
978-623-388-329-0 (jil.2 PDF)

Isi buku ini menggunakan huruf Noto Serif 10/12 pt., SIL Open Font License. xvi, 248 hlm.: 17,6 × 25 cm

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi memiliki tugas dan fungsi mengembangkan buku pendidikan pada satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah, termasuk Pendidikan Khusus. Buku berkaitan erat dengan kurikulum. Buku yang dikembangkan saat ini mengacu pada kurikulum yang berlaku, yaitu Kurikulum Merdeka.

Salah satu bentuk dukungan terhadap implementasi Kurikulum Merdeka di satuan pendidikan ialah mengembangkan buku teks utama yang terdiri atas buku siswa dan panduan guru. Buku ini merupakan sumber belajar utama dalam pembelajaran bagi siswa dan menjadi salah satu referensi atau inspirasi bagi guru dalam merancang dan mengembangkan pembelajaran sesuai karakteristik, potensi, dan kebutuhan peserta didik. Keberadaan buku teks utama ini diharapkan menjadi fondasi dalam membentuk Profil Pelajar Pancasila yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan yang Maha Esa, dan berakhlak mulia; berkebinekaan global, berjiwa gotong royong, mandiri, kritis, dan kreatif.

Buku teks utama, sebagai salah satu sarana membangun dan meningkatkan budaya literasi masyarakat Indonesia, perlu mendapatkan perhatian khusus. Pemerintah perlu menyiapkan buku teks utama yang mengikuti perkembangan zaman untuk semua mata pelajaran wajib dan mata pelajaran peminatan, termasuk Pendidikan Khusus. Sehubungan dengan hal itu, Pusat Perbukuan merevisi dan menerbitkan buku-buku teks utama berdasarkan Capaian Pembelajaran dalam Kurikulum Merdeka.

Kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berkolaborasi dalam upaya menghadirkan buku teks utama ini. Kami berharap buku ini dapat menjadi landasan dalam memperkuat ketahanan budaya bangsa, membentuk mentalitas maju, modern, dan berkarakter bagi seluruh generasi penerus. Semoga buku teks utama ini dapat menjadi tonggak perubahan yang menginspirasi, membimbing, dan mengangkat kualitas pendidikan kita ke puncak keunggulan.

Jakarta, Juli 2024
Kepala Pusat Perbukuan,

Supriyatno, S.Pd., M.A.

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmat-Nya dalam menyelesaikan penulisan Buku Siswa ini. Buku ini disusun untuk memenuhi Capaian Pembelajaran Fase F untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI sesuai dengan revisi Capaian Pembelajaran.

Matematika sering kali dianggap pelajaran yang abstrak, sulit, dan kurang relevan dalam kehidupan. Padahal pada hakikatnya, banyak konsep dan prinsip matematika justru muncul di alam dan dekat dengan kehidupan sehari-hari. Harapan kami, buku ini dapat mengubah mispersepsi mengenai matematika dengan menggunakan pendekatan yang lebih kontekstual melalui permasalahan kehidupan nyata dan melibatkan siswa secara aktif dalam bereksplorasi dengan pertanyaan penuntun. Sebagian besar pembelajaran matematika dalam buku ini diupayakan menarik perhatian dan minat peserta didik sehingga peserta didik “tidak merasa sedang belajar matematika”. Peserta didik akan diajak untuk berpikir kritis dan kreatif untuk mengembangkan keterampilan berpikir aras tinggi (HOTS). Selain itu, di banyak kesempatan peserta didik akan berdiskusi, berkomunikasi, bekerja sama, dan menggunakan teknologi dalam menyelesaikan permasalahan sehingga mengasah kemampuan sesuai dengan Profil Pelajar Pancasila dan keterampilan abad ke-21.

Akhir kata, kami berharap buku ini bermanfaat bagi pembelajaran matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI, dan semakin banyak peserta didik yang mulai menyenangi matematika dan merasakan manfaat belajar matematika.

Selamat bermatematika!

Jakarta, Mei 2024
Tim Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar	iii
Prakata	iv
Daftar Isi	v
Daftar Gambar	vi
Daftar Tabel	viii
Petunjuk Penggunaan Buku	ix

Bab 1. Analisis Data Bivariat

A. Data Kategorikal dan Numerikal	6
B. Data Bivariat	11
C. Hubungan Antara Dua Variabel Kategorikal	17
D. Hubungan antara Dua Variabel Numerikal	36

Bab 2. Komposisi Fungsi dan Fungsi Invers

A. Komposisi Fungsi	88
B. Fungsi Invers	108

Bab 3. Transformasi Fungsi

A. Pergeseran	132
B. Pencerminan	144
C. Peregangan dan Pemampatan	158
D. Pemodelan	166

Bab 4. Lingkaran

A. Lingkaran dan Busur Lingkaran	182
B. Lingkaran dan Garis Singgung	196
C. Lingkaran dan Tali Busur	206

Indeks	219
Glosarium	221
Daftar Pustaka	225
Biodata Pelaku Perbukuan	227

Daftar Gambar

Gambar 1.1	Ilusi Optik.....	14
Gambar 1.2	Diagram Batang Antara Dua Variabel yang Tidak Ada Asosiasi.....	28
Gambar 1.3	Contoh kesimpulan yang salah akibat variabel X dan Y yang tertukar	38
Gambar 1.4	Arah dan Bentuk Tren Diagram Pencar	43
Gambar 1.5	Penyebaran Data Diagram Pencar	45
Gambar 1.6	Model Linear Terbaik (<i>Best-fit</i>)	52
Gambar 1.7	Data Penciran Tidak Mengubah Garis <i>Best-fit</i>	55
Gambar 1.8	Data Penciran Mengubah Garis <i>Best-fit</i>	55
Gambar 1.9	Data Penciran Memunculkan Korelasi.....	56
Gambar 1.10	Anscombe's Quartet	56
Gambar 1.11	Karl Pearson.....	72
Gambar 1.12	Korelasi Sempurna dan Tidak Berkorelasi.....	73
Gambar 1.13	Nilai r dan Tingkat Korelasi.....	74
Gambar 2.1	Stasiun Pengisian Bahan Bakar Umum	83
Gambar 2.2	Grafik Jarak Tempuh terhadap Volume Bahan Bakar	83
Gambar 2.3	Analogi Mesin Sebagai Fungsi	85
Gambar 2.4	Relasi antara Kategori Kendaraan Bermotor dengan Nilai Asuransi	85
Gambar 2.5	Penggunaan Tes Vertikal pada Grafik $x = y^2 - 1$	86
Gambar 2.6	Penggunaan Tes Garis Vertikal pada Grafik $y = x^3$	86
Gambar 2.7	Grafik Jarak Tempuh terhadap Volume Bensin	87
Gambar 2.8	Domain, Kodomain, dan <i>Range</i>	87
Gambar 2.9	Hubungan antara Suhu dengan Ketinggian di Atas Permukaan Bumi.....	88
Gambar 2.10	Jarak Henti Mobil.....	89
Gambar 2.11	Dua Fungsi yang Akan Dijumlahkan.....	91
Gambar 2.12	Pendapatan dan Biaya Produksi	92
Gambar 2.14	Penjumlahan Dua Fungsi Gelombang Bunyi yang Menghasilkan Penguatan dan Pelemahan Bunyi	93
Gambar 2.13	Dua Gelombang Bunyi dari Dua Pengeras Suara.....	93
Gambar 2.15	Osilasi dan Osilasi yang Teredam	95
Gambar 2.16	Kubus dan Bola	99

Gambar 2.17	Diskon dalam Persen dan Potongan Harga	100
Gambar 2.18	Diskon Ganda.....	101
Gambar 2.19	Diagram Panah dari Komposisi Fungsi	103
Gambar 2.20	Grafik Dua Fungsi yang Akan Dikomposisikan.....	105
Gambar 2.21	Mesin Penerjemahan Bahasa Inggris-Indonesia.....	109
Gambar 2.22	Bola Bergerak ke Atas Kemudian ke Bawah	110
Gambar 2.23	Grafik Posisi terhadap Waktu dari Bola yang Bergerak Vertikal ke Atas dan ke Bawah.....	110
Gambar 2.24	Grafik Posisi terhadap Waktu dari Benda Bergerak dengan Kecepatan Tetap.....	110
Gambar 2.25	Fungsi Surjektif, Fungsi Injektif, dan Fungsi Bijektif	111
Gambar 2.26	Fungsi Surjektif dan Bukan Fungsi Surjektif	111
Gambar 2.27	Fungsi Bijektif dan Bukan Fungsi Bijektif.....	111
Gambar 2.28	Grafik Garis Lurus $y = \frac{1}{2}x + 3$	113
Gambar 2.29	Grafik Fungsi Kuadrat $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$	114
Gambar 2.30	Grafik Suatu Fungsi.....	116
Gambar 2.31	Domain dan <i>Range</i> dari Fungsi Asal dan Fungsi Invers	117
Gambar 2.32	Diagram Panah dari Suatu Fungsi Asal dan Fungsi Inversnya	119
Gambar 2.33	Mesin Fungsi untuk Masalah Diskon Ganda.....	121
Gambar 2.34	Domain dan <i>Range</i> dari $y = x + 3$ dan $x = y - 3$	122
Gambar 2.35	Gas Karbondioksida Mengisi Balon.....	127
Gambar 3.1	Baris-berbaris	132
Gambar 3.2	Gambar Orang Becermin.....	144
Gambar 3.3	Slinki	158
Gambar 4.1	Sepeda dengan Berbagai Bentuk Roda	179
Gambar 4.2	Penutup Lubang Selokan.....	179
Gambar 4.3	Mercusuar.....	182
Gambar 4.4	Kolam Ikan	183
Gambar 4.5	Thales of Miletus.....	188
Gambar 4.7	Cakrawala	196
Gambar 4.6	Roda Kereta Api.....	196
Gambar 4.8	Gerhana Matahari	205
Gambar 4.9	Busur Panah.....	206
Gambar 4.10	Segitiga sama sisi ABC	218

Daftar Tabel

Tabel 1.1	Kumpulan Data Bunga Iris.....	16
Tabel 1.2	Partisipasi Sekolah Tahun 2023 di Indonesia	34
Tabel 1.3	Kelompok Umur dan Status Bekerja	35
Tabel 1.4	Hubungan Nilai r dan Tingkat Korelasi	75
Tabel 2.1	Jarak Henti Mobil.....	90
Tabel 2.2	Harga dengan Diskon 20% dan Potongan Harga.....	100
Tabel 2.3	Radius dan Luas Tumpahan Minyak.....	102
Tabel 2.4	Tabel Fungsi g	104
Tabel 2.5	Tabel Fungsi f	104
Tabel 2.6	Sisi dan Volume Kubus.....	115
Tabel 2.7	Kecepatan Mobil Terhadap Waktu.....	117
Tabel 2.8	Banyak Baju Kaos dan Harganya	120
Tabel 3.1	Fungsi Hasil Pergeseran Secara Vertikal.....	133
Tabel 3.2	Fungsi Hasil Pergeseran Secara Horizontal	137
Tabel 3.3	Fungsi Hasil Pergeseran Secara Horizontal dan Vertikal...	140
Tabel 3.4	Pencerminan terhadap Sumbu- x	145
Tabel 3.5	Pencerminan terhadap Sumbu- y	148
Tabel 3.6	Nilai x dan y untuk $y = ax^2$ untuk $a = 1, 2, 5, 10$	159
Tabel 3.7	Nilai x dan y untuk $y = ax^2$ untuk $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$	159
Tabel 3.8	Nilai x dan y untuk $y = a \cdot 2^x$ untuk $a = 1, 2, 3, 5, 10$	160
Tabel 3.9	Nilai x dan y untuk $y = a \cdot 2^x$ untuk $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$	161
Tabel 3.10	Perbandingan $y = x^2$ dengan $y = 2x^2$	163
Tabel 3.11	Perbandingan $y = x^2$ dengan $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$	163
Tabel 3.12	Ketinggian Bola	167
Tabel 4.1	Sudut Pusat dan Sudut Keliling.....	184

Petunjuk Penggunaan Buku _____

Pertanyaan Pemantik



Kamu menemukan bagian ini pada halaman sampul bab karena merupakan pertanyaan yang menuntun pemahaman materi dan pengembangannya sepanjang pembelajaran bab tersebut. Kamu akan mendapatkan gambaran tentang materi bab tersebut melalui pertanyaan tersebut.

Tujuan Pembelajaran

Tujuan Pembelajaran _____

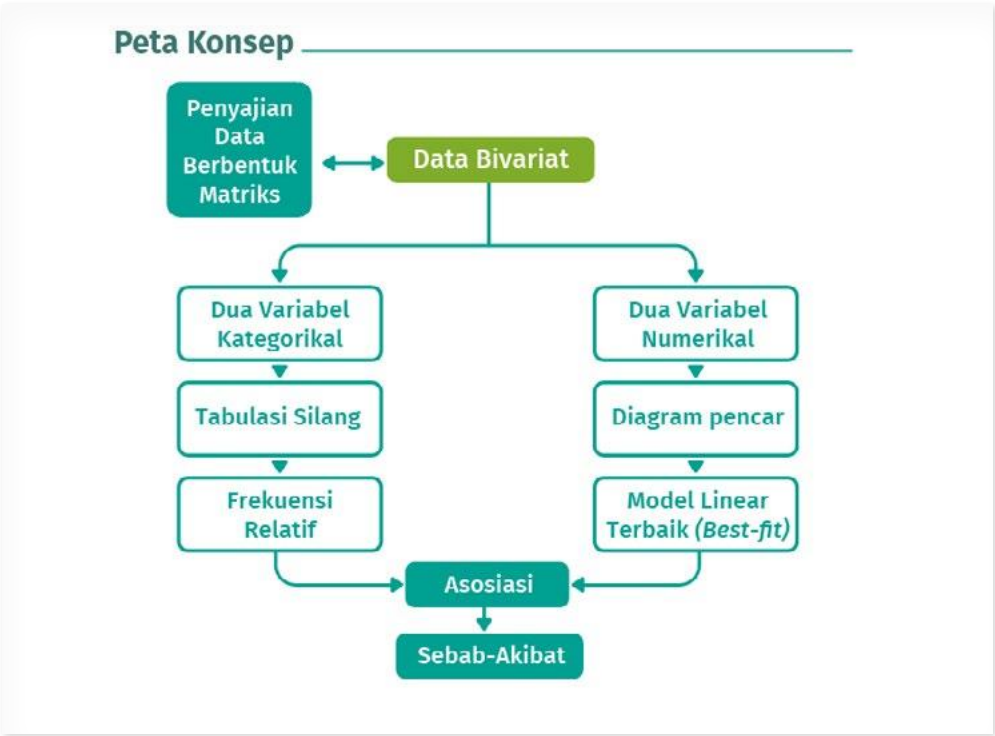
Pada pembelajaran ini kamu akan belajar sifat-sifat lingkaran dan memanfaatkannya untuk menyelesaikan masalah yang terkait.

Terdapat pada awal bab yang menjadi arahan tercapainya kompetensi setelah mempelajari bab tersebut. Tujuan pembelajaran membantumu untuk memonitor perkembangan belajarmu dalam bab tersebut yang akan dihubungkan dengan refleksi pada akhir pembahasan.

Kata Kunci

Kata atau konsep yang merupakan kunci untuk dihubungkan dengan kata atau konsep lain. Pemahaman terhadap kata kunci menolongmu untuk mengaitkan konsep yang satu dengan konsep lainnya.

Peta Konsep



Peta konsep yang terdapat pada awal bab merupakan diagram yang menunjukkan hubungan antarkonsep yang terdapat dalam setiap bab. Kamu perlu mencermati peta konsep ini untuk mendapatkan gambaran yang luas tentang isi bab tersebut.

Pembuka Bab



Media sosial adalah platform digital yang memungkinkan pengguna untuk berinteraksi, berbagi konten, dan terhubung dengan orang lain secara *online*. Hal ini telah menjadi bagian tak terpisahkan dari kehidupan sehari-hari bagi banyak orang di seluruh dunia. Setiap orang mempunyai

Kamu menemukan pembuka bab sebagai bagian paling awal dari bab yang memberikan gambaran besar mengenai topik yang akan dipelajari. Ada rasionalisasi dalam bab sehingga timbul minat dan motivasi kamu untuk mempelajari ide utama atau ide besar yang menghubungkan konsep-konsep.

Ayo, Mengingat Kembali



Ayo, Mengingat Kembali

Apa yang telah kamu pelajari di kelas X berhubungan dengan apa yang akan kamu pelajari di kelas XI. Kamu akan lebih mudah memahami materi pelajaran kelas XI dengan pengetahuan yang telah dipelajari di kelas X.

Ayo, Bereksplorasi



Ayo, Bereksplorasi

Kamu melakukan kegiatan ini untuk menyelidiki konsep matematika yang berkaitan dengan pembahasan materi. Eksplorasi selalu dilakukan sebelum kamu mendalami konsep matematika beserta aplikasinya.

Ayo, Berpikir Kritis



Ayo, Berpikir Kritis

Kamu berpikir kritis jika kamu dapat menganalisis informasi untuk mengambil kesimpulan atau menilai suatu hal dengan tepat. Keterampilan ini perlu kamu latih secara terus-menerus karena merupakan salah satu dari keterampilan abad ke-21.

Ayo, Berpikir Kreatif



Ayo, Berpikir Kreatif

Kamu berpikir kreatif jika kamu dapat membuat ide atau alternatif solusi yang baru yang berbeda dari hal umum.

Ayo, Mencoba



Ayo, Mencoba

Kamu diharapkan dapat mengerjakan soal atau kegiatan sejenis setelah diberikan penjelasan penyelesaian satu atau lebih dari satu soal.

Penguatan Karakter



Penguatan Karakter

Kamu diharapkan dapat menghayati dan menerapkan karakter-karakter Profil Pelajar Pancasila yang perlu dipupuk sepanjang hayat dalam kegiatan pembelajaran serta kehidupan sehari-hari.

Ayo, Berkomunikasi



Ayo, Berkomunikasi

Bertukar pikiran dengan teman-teman dan menyatakan gagasan merupakan kegiatan yang bermanfaat untuk memperdalam pengetahuan sehingga dapat menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan.

Petunjuk



Petunjuk

Petunjuk kamu gunakan dalam pemecahan masalah. Baca dan gunakan bagian ini jika kamu mengalami kendala saat mencari solusi dari sebuah masalah.

Tahukah Kamu?



Tahukah Kalian?

Kamu mendapatkan informasi tambahan yang berkaitan dengan materi yang sedang kamu pelajari yang merupakan aplikasi matematika dalam suatu fenomena atau peristiwa.

Ayo, Berefleksi



Ayo, Berefleksi

Merenungkan dan melihat kembali secara evaluatif dan mendalam apa yang sudah dipelajari, membandingkannya, dan menarik pelajaran atau kesimpulan sederhana.

Ayo, Bekerja Sama



Ayo, Bekerja Sama

Bekerja sama merupakan salah satu bentuk dari bergotong royong. Kamu bekerja sama untuk menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan matematika sehingga pemahamanmu terhadap materi pelajaran lebih baik lagi. Selain itu, bekerja sama perlu saling memahami dan menghargai satu sama lain.

Ayo, Menggunakan Teknologi



Ayo, Menggunakan Teknologi

Teknologi memudahkan kamu untuk menyelesaikan masalah atau pekerjaan matematika. Kamu dapat memanfaatkan kalkulator dan berbagai aplikasi untuk mengerjakan tugasmu. Kamu dapat memilih teknologi yang sesuai dengan kebutuhanmu.

Contoh Soal

1. Isilah banyak responden pada sel yang merupakan irisan kategori jenis kelamin dan media sosial. Untuk mempermudah proses perhitungan, kamu dapat menggambar turus pada sel tersebut.

Jenis Kelamin	Media Sosial	
	W	L
Laki-laki	...	...
Perempuan	...	...

Bagian ini diberikan untuk membantu pemahaman kamu atas konsep yang dipelajari. Perhatikan contoh soal dan kaitkan dengan penjelasan sebelumnya agar kamu merasakan manfaat bagian tersebut.

Latihan

Latihan 3.1

Kerjakan soal-soal berikut.

1. Tentukan fungsi yang dihasilkan jika fungsi $y = x^2$ digeser sejauh:
 - a. 5 satuan ke bawah.
 - b. 3 satuan ke kanan.
 - c. 3 satuan ke kanan dan 5 satuan ke bawah.

Kamu mengerjakan soal-soal dengan tiga jenis tingkat kesulitan, yaitu dasar, menengah, dan tinggi. Pertanyaan pada tingkat dasar berupa jawaban pendek yang menguji pemahaman konsep dan keterampilan dasar. Tingkat menengah berupa permasalahan yang lebih terstruktur, sedangkan tingkat tinggi merupakan permasalahan aplikasi dan keterampilan aras tinggi (HOTS).

Uji Kompetensi

Uji Kompetensi

1. Kelompokkan data berikut ini menurut jenis datanya, data kategorikal atau numerikal.

• rasa	• alat tulis
• merek buku	• lebar jalan
• tinggi rumah	• jarak rumah ke sekolah
• sayuran	• volume bahan bakar
• diameter bola	• cuaca

Terdapat pada akhir bab, merupakan sarana bagi kamu untuk mengukur pencapaianmu dalam topik bab. Kamu dapat mengerjakan sejumlah soal yang bervariasi dari yang sederhana hingga yang kompleks. Selain itu, soal dapat berupa hitungan ataupun pemahaman konsep.

Materi Pengayaan/Proyek

Pengayaan _____

Regresi Linear

Di dalam proses analisis regresi linear, kamu akan mempelajari cara mencari garis regresi yang paling tepat terhadap titik-titik yang ada pada diagram pencar. Garis regresi itu akan memberikan deskripsi terbaik mengenai hubungan antara variabel independen dan dependen. Sama halnya untuk mendapatkan persamaan garis lurus pada umumnya, persamaan garis regresi sering dituliskan dalam bentuk umum berikut ini.

Kegiatan yang dapat digunakan untuk memperluas atau memperdalam wawasan dan pemahaman atas konsep matematika yang sedang dipelajari. Materi pengayaan dapat bersifat sebagai pendalaman materi, penerapan dalam bidang teknologi/informatika, atau kegiatan eksplorasi/proyek.

Refleksi

Refleksi

Pengalaman Saya	Bisa	Masih Perlu Belajar
Saya bisa membedakan fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif		
Saya bisa menentukan fungsi invers dari suatu fungsi		
Saya bisa menentukan domain, kodomain, dan <i>range</i> dari fungsi invers		
Saya bisa memecahkan masalah nyata dengan menggunakan fungsi invers		

Pada akhir bab atau subbab, kamu akan diajak memikirkan kembali apa yang sudah dipelajari dan seberapa dalam/tepat pemahamanmu atas pembelajaran pada bagian tersebut.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2024

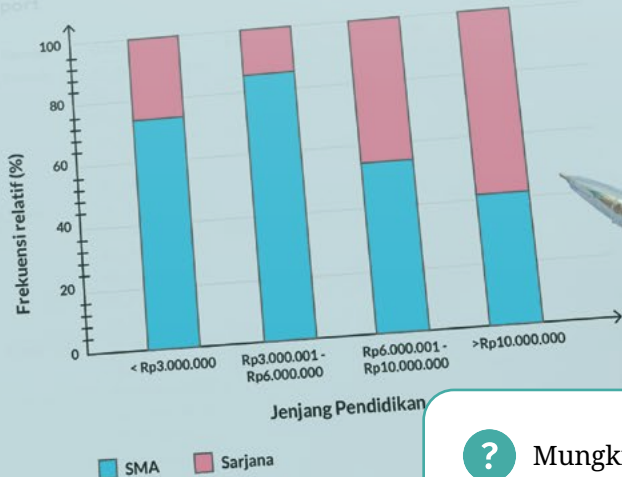
Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI (Edisi Revisi)

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-388-329-0

Bab

1

Analisis Data Bivariat



Mungkin kamu pernah mendapatkan nasihat dari guru dan orang tua bahwa semakin rajin kamu belajar maka kamu akan memperoleh nilai yang semakin baik. Apakah kamu setuju? Bagaimana caramu dapat menunjukkan hal itu dengan menggunakan Matematika?

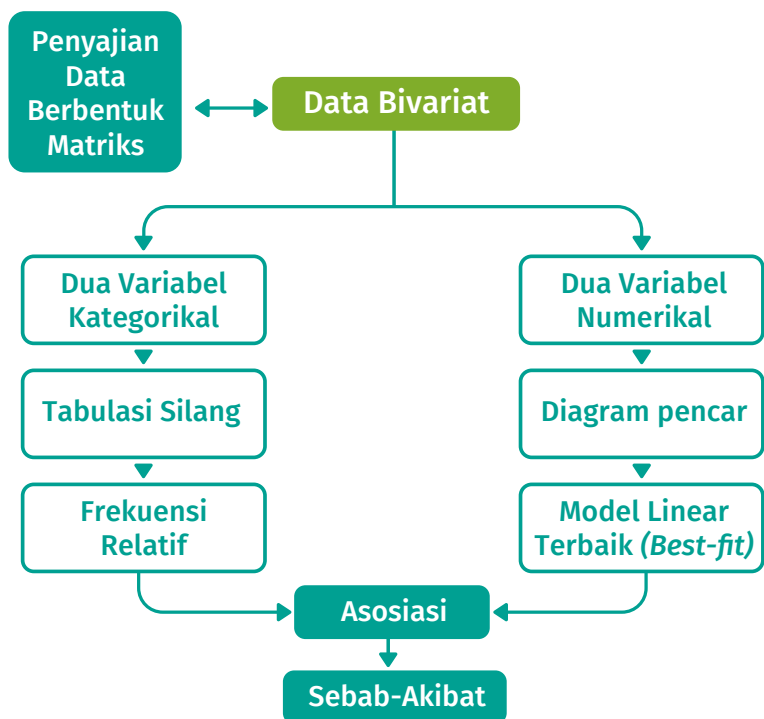
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kamu dapat mengidentifikasi dan menjelaskan asosiasi antara dua variabel kategorikal (kualitatif); mengidentifikasi dan menjelaskan asosiasi antara dua variabel numerikal (kuantitatif); memperkirakan model linear terbaik (*best fit*) pada data numerikal (kuantitatif); dan membedakan hubungan asosiasi dan sebab-akibat.

Kata Kunci

- data bivariat
- korelasi
- asosiasi
- model linear terbaik (*best-fit*)

Peta Konsep





Ayo, Mengingat Kembali

Coba ingat kembali mengenai materi sebelumnya supaya kamu dapat mempelajari bab baru ini dengan mudah.

1. Sajikan data berikut ini dalam bentuk diagram batang.

a.

Jenis Olahraga	Jumlah Siswa
Sepak bola	10
Voli	8
Tenis Meja	5
Bulu Tangkis	14
Renang	3

b.

Tahun	Penjualan Produk A (unit)	Penjualan Produk B (unit)	Penjualan Produk C (unit)
2020	5000	9000	6000
2021	6500	10500	7500
2022	7500	12000	9000
2023	3500	6000	5000

2. Gambarkanlah diagram *Box Plot* dari nilai ujian Matematika dan Bahasa Indonesia dan buatlah kesimpulan mengenai perbandingan nilai ujian Matematika dan Bahasa Indonesia.

Ujian	Nilai ke-1	Nilai ke-2	Nilai ke-3	Nilai ke-4	Nilai ke-5	Nilai ke-6	Nilai ke-7	Nilai ke-8
Matematika	85	90	75	80	83	87	90	82
Bahasa Indonesia	73	80	68	75	80	70	70	85

3. Gambarlah diagram pencar dari data berikut ini.

a.

Tinggi Badan (cm)	Berat Badan (kg)
180	90
160	50
170	78
190	90
175	80

b.

Durasi Belajar (jam)	Nilai Ujian
3	90
1	86
5	84
4	92
3	91
5	100
0	76
1	82
2	85

4. Hitunglah rata-rata dari data berikut ini:

a. 8, 7, 10, 12, 9, 4, 6

b. 300, 320, 310, 305, 315, 320, 290, 310, 325, 315



Media sosial adalah platform digital yang memungkinkan pengguna untuk berinteraksi, berbagi konten, dan terhubung dengan orang lain secara *online*. Hal ini telah menjadi bagian tak terpisahkan dari kehidupan sehari-hari bagi banyak orang di seluruh dunia. Setiap orang mempunyai akses ke berbagai media sosial dan pilihan tertentu berdasarkan fungsi dan manfaatnya. Media sosial juga menyimpan berbagai data dari penggunanya seperti umur, jenis kelamin, kata kunci penelusuran, jenis video dan gambar yang sering ditelusuri, durasi penggunaan media sosial, dan informasi lainnya yang digunakan dalam proses analisis untuk memberikan rekomendasi video dan gambar serta peningkatan fitur aplikasi. Untuk mencapai hasil tersebut, mereka perlu melakukan analisis hubungan antarvariabel dari data tersebut. Contoh hubungan antara dua variabel yang dapat dianalisis adalah hubungan antara jenis kelamin dan jenis video yang sering ditonton, hubungan antara umur dan jenis video yang sering ditelusuri, dan hubungan antara umur dan durasi penggunaan media sosial. Dengan mengetahui hubungan seperti itu, maka media sosial dapat menawarkan banyak fitur dan rekomendasi baru agar penggunanya terus menggunakan platform media sosial tersebut. Menarik bukan? Adakah hubungan antara dua variabel lainnya yang menarik yang terpikirkan olehmu? Jika ada, bagaimana caramu dapat menganalisis hubungan tersebut?

Untuk menjawab pertanyaan di atas, kamu perlu mempelajari hubungan antara dua variabel kategorikal dan numerikal serta proses analisis yang akan membantumu untuk mengambil kesimpulan yang tepat. Hal ini juga akan mempersiapkan kamu untuk menyelesaikan permasalahan baru yang akan kamu temukan dalam kehidupan sehari-hari.

A. Data Kategorikal dan Numerikal

Data dibagi menjadi berbagai jenis berdasarkan karakteristiknya. Pada saat SMP, kamu telah mempelajari bahwa secara umum data dibagi menjadi dua jenis, yaitu data kategorikal dan numerikal. Lakukan **Eksplorasi 1.1** dan evaluasi dirimu apakah sudah dapat mengategorikan data secara tepat.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 1.1

1. Isilah tabel berikut ini sesuai dengan contoh yang diberikan:

Data	Nilai data yang mungkin
Tinggi pintu	2 meter
Musim	hujan, kemarau
Tinggi pohon	
Alat musik	
Jenis kendaraan	
Harga buku	

2. Kelompokkan data di atas menjadi 2 kelompok besar ke dalam tabel berikut ini menggunakan informasi dari tabel No.1 dan jelaskan dasar atau pembeda yang kamu gunakan untuk pengelompokan tersebut.

- Tinggi pintu
 - Musim
 - Tinggi pohon
- Alat musik
 - Jenis kendaraan
 - Harga buku

Kelompok Data A	Kelompok Data B

3. Jika dikatakan bahwa dua kelompok data di atas adalah data kategorikal dan data numerikal, kelompok data mana yang merupakan data kategorikal dan data numerikal?
4. Buatlah kesimpulan mengenai karakteristik data kategorikal dan data numerikal dengan memberikan penjelasan yang tepat. Berdiskusilah dengan temanmu untuk berbagi hasil kesimpulan yang telah dibuat.

Apakah kesimpulan dari **Eksplorasi 1.1** sudah tepat? Ayo, baca penjelasan berikut ini.

Data kategorikal atau yang juga sering disebut sebagai **data kualitatif** adalah data yang dikelompokkan ke dalam kategori. Data kategorikal biasanya berbentuk kata-kata, seperti jenis kelamin (laki-laki dan perempuan), jenis pekerjaan (pegawai negeri sipil atau PNS, swasta, wiraswasta), jenjang pendidikan (TK, SD, SMP, SMA, Sarjana, Pascasarjana), kota asal (Palembang, Jakarta, Balikpapan, Makassar, Merauke), dan sejenisnya.

Data numerikal atau yang juga sering disebut sebagai **data kuantitatif** adalah data yang berbentuk angka, seperti berat badan, diameter kepala, luas kelas, tekanan darah, jumlah uang tabungan, dan sejenisnya.



Ayo, Berkomunikasi

Diskusikan secara berpasangan, apakah ada contoh data yang membuat bingung sehingga kamu mengalami kesulitan dalam menentukan pengelompokan data menjadi data kategorikal atau data numerikal? Jika tidak ada, maka kamu dapat menggunakan data berikut ini untuk berdiskusi.

- Ukuran baju
- Juara perlombaan
- Tahun

Apa yang dapat kamu simpulkan dari diskusi tersebut?

Mengapa penting bagimu untuk mempelajari jenis data di awal bab ini? Ayo, lakukan **Eksplorasi 1.2** berikut ini untuk mencari tahu.



Eksplorasi 1.2

Lakukanlah dua survei yang berbeda terhadap seluruh siswa yang ada di kelasmu. Gunakan penggaris untuk mengukur panjang sepatu dari ujung jari hingga tumit, kemudian bulatkan hasil pengukuran menjadi satu angka desimal.

- a. Survei mengenai ukuran sepatu (dalam skala cm).
 - b. Survei mengenai ukuran sepatu (dalam kategori Kecil, Sedang, Besar)
 - Kecil (kurang dari 23,5 cm)
 - Sedang (23,5–26,5 cm)
 - Besar (lebih dari 26,5 cm)
1. Sajikan data di atas secara terpisah ke dalam bentuk tabel dan diagram yang sesuai. Gunakan statistika deskriptif (rerata, median, modus, dan sebagainya) yang sesuai untuk mendukung penyajian data.
 2. Apa yang dapat kamu simpulkan mengenai jenis data yang dikumpulkan pada dua survei di atas?

3.



Ayo, Berpikir Kritis

Jika kamu hanya memiliki satu kali kesempatan untuk mengadakan survei dan hanya bisa mengumpulkan satu jenis data ukuran sepatu, survei mana yang akan kamu lakukan? Jelaskan alasanmu!

4.



Ayo, Berpikir Kreatif

Buatlah sebuah tujuan penelitian yang mungkin untuk masing-masing survei yang dilakukan.

Dari **Eksplorasi 1.2**, kamu dapat memahami pentingnya menentukan jenis data yang perlu dikumpulkan sebelum melakukan survei. Penentuan jenis data yang tepat akan membantumu mencapai tujuan survei secara lebih efektif meskipun waktu dan kesempatan terbatas. Dalam analisis data, sering kali data numerikal diubah ke dalam data kategorikal dengan cara dilakukan

pengelompokan. Sebagai contoh, data berat badan yang merupakan data numerikal dapat dikelompokkan menjadi kurus (< 50 kg), sedang ($50\text{--}75$ kg), dan gemuk (>75 kg). Dengan demikian, data tersebut sudah berubah menjadi data kategorikal.

Pada **Eksplorasi 1.2**, jika kamu mengadakan survei (a) maka kamu bisa mengubah data tersebut ke bentuk data kategorikal jika diperlukan, tetapi jika kamu mengadakan survei (b) maka data yang diperoleh sudah tidak dapat diubah menjadi data numerikal.

Latihan 1.1

1. Kelompokkan data berikut ini menurut jenis datanya dengan menuliskannya di dalam tabel yang tersedia.

- luas tanah
 - nilai ujian matematika
 - jenis penyakit
 - saluran televisi
 - golongan darah
 - volume air
 - jenis hewan peliharaan
 - suhu udara
 - jumlah karyawan
 - hobi
- nama hari
 - jenis kendaraan
 - jenis olahraga
 - durasi belajar
 - jarak tempuh
 - rentang pendapatan
 - nama kota
 - kadar polusi udara
 - kecepatan internet
 - nama buah-buahan

Data Kategorikal	Data Numerikal

2. Buatlah daftar kategori atau pengelompokan untuk mengubah data numerikal berikut menjadi data kategorikal.
- Umur
 - Uang jajan
 - Tinggi badan
 - Kecepatan sepeda motor

3.



Ayo, Berpikir Kreatif

Buatlah daftar data kategorikal dan data numerikal yang diperoleh dari tumbuhan.

Data Kategorikal	Data Numerikal



Ayo, Berefleksi

Mari kita merefleksikan kembali hal-hal apa saja yang telah kamu pelajari.

- Apakah saya sudah bisa mengidentifikasi dan membedakan data kategorikal dan data numerikal?
- Apakah saya sudah bisa mengubah data numerikal menjadi data kategorikal?

B. Data Bivariat

Pada saat kelas X, kamu telah mempelajari jenis data dan cara menyajikan data univariat. Data univariat adalah data yang hanya memiliki satu variabel. Analisis yang telah kamu pelajari memungkinkan kamu hanya sebatas untuk menyajikan dan menjelaskan data tersebut secara terpisah antara suatu variabel dan variabel lainnya. Kamu juga telah mempelajari beberapa penyajian data bivariat secara tidak langsung, terutama saat belajar mengenai diagram batang, diagram pencar, dan *box plot*.

Pada bab ini, kamu akan mempelajari lebih dalam mengenai data bivariat. Apa itu data bivariat? Ayo, lakukan **Eksplorasi 1.3** berikut ini untuk mengenali data bivariat.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 1.3

Sebuah penelitian dilakukan untuk mengidentifikasi hubungan antarvariabel yang menunjukkan kondisi kesehatan seseorang. Ringkasan kondisi kesehatan yang diperoleh dari sukarelawan yang namanya telah disamarkan disajikan dalam bentuk tabel berikut ini.

No.	Nama	Jenis Kelamin (L / P)	Usia	Berat Badan (kg)	Tinggi Badan (cm)	Tekanan Darah Sistolik (mmHg)	Tekanan Darah Diastolik (mmHg)	Suhu Tubuh (°C)	Kondisi Penglihatan	Kondisi Pendengaran
1.	A	L	25	60	172	120	80	37,0	Normal	Normal
2.	B	L	32	65	175	110	70	36,5	Normal	Normal
3.	C	P	28	53	163	130	85	36,9	Normal	Normal
4.	D	P	45	62	165	125	80	37,2	Kurang jelas	Normal
5.	E	P	31	50	158	115	75	36,7	Normal	Normal
6.	F	L	53	75	178	120	78	36,8	Kurang jelas	Kurang jelas
7.	G	P	29	49	159	135	88	37,1	Normal	Normal
8.	H	L	22	65	168	105	68	36,6	Normal	Normal
9.	I	P	38	58	168	125	82	36,5	Normal	Kurang jelas
10.	J	L	47	82	182	130	85	37,0	Kurang jelas	Normal

Tabel di atas berisi banyak variabel yang dapat digunakan dalam proses analisis. Bayangkan dirimu sebagai salah satu dari peneliti tersebut. Hubungan antara dua variabel apa saja yang menarik untuk diidentifikasi? Jawablah pertanyaan berikut ini dengan memindahkan dua buah variabel sesuai dengan pasangan yang telah ditentukan ke dalam tabel yang telah disediakan di bawah ini, misalnya tabel pertama dapat diisi dengan Jenis Kelamin dan Berat Badan dan berikan penjelasan mengenai:

- a. hubungan antara dua variabel apa yang akan diteliti; dan
- b. hubungan seperti apa yang dapat diperoleh dari dua variabel tersebut.

Data Kategorikal	Data Numerikal	Data Kategorikal	Data Kategorikal	Data Numerikal	Data Numerikal

a. Hubungan antara

dan _____

b. _____

a. Hubungan antara

dan _____

b. _____

a. Hubungan antara

dan _____

b. _____

Diskusikan dengan temanmu mengenai isian tabel di atas. Diskusi berfokus pada kemungkinan hubungan antara variabel dan alasan yang mendasari hubungan yang mungkin antara dua variabel tersebut.

Setelah memperoleh dan menyajikan data bivariat pada **Eksplorasi 1.3**, kamu dapat mengidentifikasi dan menjelaskan hubungan antara dua variabel. Pada beberapa kasus, hubungan antara dua variabel terlihat sangat jelas sehingga tidak memerlukan metode khusus untuk menemukan hubungannya. Namun, pada beberapa kasus, kamu akan kesulitan melihat hubungannya sehingga membutuhkan metode khusus di dalam proses pengolahan data tersebut.

Bivariat memiliki arti dua variabel sehingga **data bivariat** adalah data yang memiliki dua variabel. Analisis data bivariat memungkinkan kamu untuk mengidentifikasi hubungan antara dua variabel dan menjelaskan hubungannya. Hubungan antara dua variabel ini disebut sebagai **asosiasi**. Asosiasi antara dua variabel dapat berupa pasangan antarvariabel seperti berikut.

- Variabel kategorikal dan variabel numerikal
- Variabel kategorikal dan variabel kategorikal
- Variabel numerikal dan variabel numerikal

Variabel kategorikal adalah variabel yang berisi data kategorikal, sedangkan **variabel numerikal** adalah variabel yang berisi data numerikal.

Buku ini tidak membahas mengenai asosiasi antara variabel kategorikal dan variabel numerikal karena kamu telah mempelajari hal itu ketika berada di kelas X saat belajar mengenai diagram *box plot*. Kamu dapat membandingkan dan menemukan hubungan antara variabel dengan melihat median dan jangkauan interkuartil antardata. Coba baca kembali buku Matematika Kelas X untuk mengulang kembali materi tersebut.

Bagaimana dengan pasangan variabel lainnya? Apa yang harus dilakukan berikutnya supaya kamu dapat mengidentifikasi dan menjelaskan hubungan antara dua variabel dengan tepat? Yuk, lanjutkan pembelajaran ke subbab berikutnya supaya kamu tahu caranya dan bisa mempraktikkannya. Namun sebelum itu, evaluasi dirimu mengenai pemahamanmu pada subbab ini melalui **Latihan 1.2**.

Latihan 1.2

1. Gambar di samping ini merupakan salah satu gambar ilusi optik. Gambar apakah yang kamu lihat? Apakah kamu melihat seorang yang sudah tua atau masih muda?

Ada 20 orang yang terpilih secara acak untuk dimintai jawaban apa yang mereka lihat dari gambar tersebut. Berikut ini adalah respons dari 20 orang tersebut.



Gambar 1.1 Ilusi Optik
Sumber: brainden.com

Responden	Jenis Kelamin	Jawaban
Responden 1	Laki-laki	Orang Tua
Responden 2	Laki-laki	Orang Tua
Responden 3	Laki-laki	Orang Muda
Responden 4	Perempuan	Orang Tua
Responden 5	Perempuan	Orang Muda
Responden 6	Perempuan	Orang Tua
Responden 7	Laki-laki	Orang Muda
Responden 8	Perempuan	Orang Tua
Responden 9	Perempuan	Orang Muda
Responden 10	Laki-laki	Orang Tua

Responden	Jenis Kelamin	Jawaban
Responden 11	Perempuan	Orang Tua
Responden 12	Perempuan	Orang Tua
Responden 13	Laki-laki	Orang Tua
Responden 14	Laki-laki	Orang Muda
Responden 15	Perempuan	Orang Muda
Responden 16	Laki-laki	Orang Tua
Responden 17	Perempuan	Orang Muda
Responden 18	Laki-laki	Orang Tua
Responden 19	Laki-laki	Orang Tua
Responden 20	Perempuan	Orang Muda

- a. Hubungan antara dua variabel apa yang dapat ditemukan dari data di atas?
- b. Jelaskan hubungan seperti apa yang dapat diperoleh dari dua variabel tersebut.
2. Tekanan darah seseorang dapat berubah tergantung dari kondisi tubuh dan situasi sekitarnya. Tabel berikut ini memberikan informasi mengenai tekanan darah sistolik pada 20 orang sukarelawan yang terlibat dalam suatu penelitian. Pengukuran tekanan darah pertama akan dilakukan 15 menit sebelum wawancara dan pengukuran kedua akan dilakukan tepat setelah wawancara.

Pengukuran Pertama	Pengukuran Kedua
136	140
134	134
114	116
120	122
134	136
102	110
126	128
124	122
122	134
126	132
128	128
118	124
112	110
124	126
128	130
130	132
126	136
130	142
128	134
130	128

- Jelaskan hubungan seperti apa yang dapat diperoleh dari dua variabel tersebut?
- Apakah ada kecenderungan tertentu hanya dengan melihat data pada tabel? Jelaskan kecenderungan tersebut.
- 

Ayo, Berpikir Kritis

Jika dilakukan pengukuran ketiga yaitu 15 menit setelah wawancara, jelaskan apa yang mungkin terjadi dengan tekanan darah sukarelawan jika dibandingkan dengan pengukuran pertama dan pengukuran kedua.

3. Tabel di bawah ini berisi 15 dari 150 data dari bunga Iris dari berbagai spesies. Kumpulan data ini diterbitkan oleh R.A. Fisher pada tahun 1936 dan sangat terkenal dalam ilmu Statistika.

Tabel 1.1 Kumpulan Data Bunga Iris

Spesies	Lebar Mahkota Bunga (mm)	Panjang Mahkota Bunga (mm)	Lebar Kelopak Bunga (mm)	Panjang Kelopak Bunga (mm)
Setosa	2	14	35	51
Setosa	3	14	34	46
Versicolor	14	47	32	70
Setosa	1	15	31	49
Virginica	25	61	36	72
Versicolor	13	40	23	55
Setosa	2	14	32	47
Versicolor	15	42	30	59
Versicolor	10	40	22	60
Virginica	23	53	32	64
Virginica	24	56	34	63
Setosa	2	15	37	54
Versicolor	13	43	29	62
Virginica	19	51	27	58
Virginica	21	54	31	69

Sumber: <https://www.kaggle.com/>

- a. Tulislah tiga pasang variabel yang hubungannya terlihat dengan jelas dan jelaskan hubungan yang mungkin terjadi pada setiap pasangan variabel tersebut.

b.



Ayo, Berpikir Kritis

Tulislah sepasang variabel yang hubungannya tidak terlihat dengan jelas dan sertakan alasannya.

4.



Ayo, Berpikir Kreatif

Bayangkan dirimu adalah seseorang yang dipercayai untuk menyelesaikan suatu permasalahan menggunakan ilmu Statistika. Tulislah suatu masalah dan dua variabel yang harus diperoleh untuk membuat suatu kesimpulan mengenai hubungan kedua variabel tersebut dalam proses penyelesaian masalah tersebut.

- Suatu masalah yang menghubungkan satu variabel kategorikal dan satu variabel numerikal.
- Suatu masalah yang menghubungkan dua variabel kategorikal.
- Suatu masalah yang menghubungkan dua variabel numerikal.



Ayo, Berefleksi

Mari kita merefleksikan kembali hal-hal apa saja yang telah kamu pelajari.

- Apakah saya sudah bisa menyajikan data bivariat dalam bentuk tabel?
- Apakah saya sudah bisa menjelaskan kemungkinan hubungan antara dua variabel?

C. Hubungan Antara Dua Variabel Kategorikal

Proses analisis hubungan antara dua variabel kategorikal diawali dengan penyajian data dalam bentuk tabulasi silang. Tabulasi silang akan mempermudah proses pengolahan dan penyajian data untuk mengidentifikasi apakah dua variabel kategorikal mempunyai hubungan atau tidak.

1. Tabulasi Silang (Tabel Silang)

Tabulasi silang adalah cara menyajikan gabungan data dua variabel kategorikal dengan mencantumkan jumlah pengamatan untuk setiap kombinasi nilai dari dua variabel kategorikal. Tabulasi silang sering juga disebut sebagai **Tabel Silang** atau **Tabel Kontingensi**. Ayo, praktikkan cara memindahkan data ke dalam tabulasi silang melalui **Eksplorasi 1.4**.

**Eksplorasi 1.4**

Sebuah survei sederhana dilakukan untuk mengidentifikasi hubungan antara jenis kelamin (laki-laki dan perempuan) dan pilihan media sosial untuk berkomunikasi (W dan L). Berikut ini adalah tabel hasil survei dari 20 responden.

Responden	Jenis Kelamin	Media Sosial	Responden	Jenis Kelamin	Media Sosial
Responden 1	Perempuan	W	Responden 11	Laki-laki	W
Responden 2	Perempuan	L	Responden 12	Laki-laki	L
Responden 3	Laki-laki	W	Responden 13	Laki-laki	W
Responden 4	Laki-laki	W	Responden 14	Perempuan	L
Responden 5	Laki-laki	W	Responden 15	Laki-laki	L
Responden 6	Perempuan	L	Responden 16	Perempuan	W
Responden 7	Laki-laki	W	Responden 17	Perempuan	L
Responden 8	Perempuan	L	Responden 18	Perempuan	L
Responden 9	Perempuan	L	Responden 19	Laki-laki	W
Responden 10	Perempuan	L	Responden 20	Laki-laki	W

- Isilah banyak responden pada sel yang merupakan irisan kategori jenis kelamin dan media sosial. Untuk mempermudah proses perhitungan, kamu dapat menggambar turus pada sel tersebut.

Jenis Kelamin	Media Sosial	
	W	L
Laki-laki	...	...
Perempuan	...	...

- Lengkapi tabel di bawah ini dengan informasi dari tabel No.1 di atas dan hitunglah jumlah pada masing-masing kategori serta jumlah keseluruhannya.

Jenis Kelamin	Media Sosial		Jumlah
	W	L	
Laki-laki	...	...	...
Perempuan	...	...	...
Jumlah	...	...	...

Setelah selesai melengkapi tabel di atas, maka kamu telah berhasil membuat tabulasi silang dari data bivariat berupa dua variabel kategorikal.

- Setelah mempraktikkan cara memindahkan data di atas ke dalam bentuk tabel yang disajikan, buatlah tahapan menggambar tabulasi silang dari suatu data bivariat dengan menggunakan kata-kata yang mudah dipahami!

Eksplorasi 1.4 mengarahkan kamu untuk menjalani tahapan pembuatan tabulasi silang dari suatu data bivariat dua variabel kategorikal. Jika kamu sudah bisa merangkum dengan baik tahapan menggambar tabulasi silang, kamu sudah dapat membuat tabel silang dari berbagai informasi data bivariat dua variabel kategorikal. Pada **Eksplorasi 1.4**, setiap variabel memiliki 2 kategori, tetapi terkadang bisa juga lebih dari 2 kategori. Kamu perlu berhati-hati dan teliti saat melakukan perhitungan supaya semua data dapat dipindahkan dengan tepat ke dalam tabulasi silang tanpa ada yang terlewat.

2. Data Berbentuk Matriks

Data yang disajikan dalam bentuk tabel dapat disajikan ke dalam bentuk lain yang lebih sederhana, yaitu dengan menghilangkan beberapa komponen dari sebuah tabel. Hal ini dikembangkan supaya data tersebut dapat dioperasikan sehingga mempermudah proses pengolahan dan analisis data secara massal. Mari kita lihat dan pelajari bentuk baru ini. Ayo, lakukan **Eksplorasi 1.5** untuk mengetahui cara mengubah data menjadi bentuk yang lebih sederhana.

**Eksplorasi 1.5**

Suatu perusahaan mengadakan uji coba vaksin baru untuk Hepatitis B yang melibatkan 600 sukarelawan yang berisiko tinggi. Namun, vaksin ini hanya diberikan kepada 300 orang sukarelawan secara acak. Setelah masa waktu tertentu, kondisi sukarelawan akan diperiksa untuk melihat hasil dari vaksin yang diberikan. Berikut ini adalah hasil uji coba vaksin yang dilakukan di tiga kota terpisah, yaitu Bandung, Palembang, dan Denpasar.

Hasil Uji Coba Vaksin Hepatitis B di Bandung

Status Vaksinasi	Kondisi Medis	
	Terserang Hepatitis	Tidak Terserang Hepatitis
Divaksinasi	12	88
Tidak Divaksinasi	28	72

Hasil Uji Coba Vaksin Hepatitis B di Palembang

Status Vaksinasi	Kondisi Medis	
	Terserang Hepatitis	Tidak Terserang Hepatitis
Divaksinasi	16	84
Tidak Divaksinasi	30	70

Hasil Uji Coba Vaksin Hepatitis B di Denpasar

Status Vaksinasi	Kondisi Medis	
	Terserang Hepatitis	Tidak Terserang Hepatitis
Divaksinasi	9	91
Tidak Divaksinasi	25	75

1. Buatlah sebuah tabel tunggal yang berisi gabungan semua data tabel di atas.

Status Vaksinasi	Kondisi Medis	
	Terserang Hepatitis	Tidak Terserang Hepatitis
Divaksinasi	...	...
Tidak Divaksinasi	...	...

2. Sajikan data dari tabel-tabel di atas ke dalam bentuk baris dan kolom dengan menghilangkan judul baris dan kolom ke dalam bentuk yang telah disediakan.

Status Vaksinasi	Kondisi Medis	
	Terserang Hepatitis	Tidak Terserang Hepatitis
Divaksinasi	12	88
Tidak Divaksinasi	28	72

Bandung

→ $\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$

Status Vaksinasi	Kondisi Medis	
	Terserang Hepatitis	Tidak Terserang Hepatitis
Divaksinasi	16	84
Tidak Divaksinasi	30	70

Palembang

→ $\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$

Status Vaksinasi	Kondisi Medis	
	Terserang Hepatitis	Tidak Terserang Hepatitis
Divaksinasi	9	91
Tidak Divaksinasi	25	75

Denpasar

→ $\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$

3. Lakukanlah hal yang sama seperti No.1. Namun, untuk kali ini, fokuslah ke bentuk baris dan kolom dari tabel-tabel di atas. Apakah kamu mendapatkan hasil yang sama dengan tabel pada No.1?

$$\begin{matrix} \text{Bandung} \\ \left[\begin{array}{cc} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \right] \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Palembang} \\ \left[\begin{array}{cc} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \right] \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Denpasar} \\ \left[\begin{array}{cc} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \right] \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \right]$$

4. Apabila data dari salah satu kota mempunyai hasil yang berbeda, misalnya kota Denpasar mempunyai data seperti di bawah ini, jelaskan kendala yang ditemukan dalam proses menggabungkan data dari ketiga kota tersebut.

Hasil Uji Coba Vaksin Hepatitis B di Denpasar (Tambahan Kategori)

Status Vaksinasi	Kondisi Medis		
	Terserang Hepatitis	Tidak Terserang Hepatitis	Indikasi Kurang Jelas
Divaksinasi	16	80	4
Tidak Divaksinasi	28	70	2

5. Buatlah kesimpulan mengenai persamaan dan perbedaan bentuk tabel terhadap proses penggabungan data.
6. Manakah yang lebih mudah, menggabungkan data dengan melihat data dari tabel atau data dari bentuk baris dan kolom? Menurutmu, apa kelebihan dan kekurangan dari masing-masing bentuk?

Bentuk baris dan kolom pada **Eksplorasi 1.5** disebut sebagai bentuk matriks. **Matriks** adalah suatu susunan bilangan yang disusun dalam baris dan kolom sehingga membentuk suatu bangun persegi. Susunan bilangan tersebut ditulis di dalam kurung lengkung “()” atau kurung siku “[]”. Matriks dapat juga digunakan untuk menyajikan data bivariat lainnya.

Catatan: Dalam buku ini, matriks dituliskan dengan menggunakan tanda kurung siku “[]”.

Pembahasan penyajian data dalam bentuk matriks ini hanyalah pengenalan awal terhadap matriks. Kamu dapat mempelajari jenis-jenis matriks, operasi bentuk matriks, dan karakteristik matriks lainnya lebih lanjut di Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI.

3. Frekuensi Relatif

Di dalam proses mengidentifikasi asosiasi antara dua variabel kategorikal, kamu perlu mencermati kecenderungan data yang diperoleh dari tabulasi silang. Ayo, lakukan eksplorasi-eksplorasi berikut ini untuk mempelajari cara membaca dan mengolah tabulasi silang supaya kamu dapat mengidentifikasi dan menjelaskan asosiasi antara dua variabel kategorikal.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 1.6

Penggunaan transportasi sering kali mengakibatkan seseorang mengalami mual. Suatu perusahaan obat-obatan ingin menentukan efektivitas tablet obat mual buatannya. Perusahaan memberikan tablet obat mual dan tablet serupa yang isinya bukan obat (placebo) masing-masing kepada 100 sukarelawan yang dipilih secara acak.

Jenis Tablet	Tingkat Kemualan				Jumlah
	Tidak	Ringan	Sedang	Berat	
Tablet Obat	41	38	16	5	100
Tablet Bukan Obat (Placebo)	17	30	38	15	100
Jumlah	58	68	54	20	200

1. Jelaskan kecenderungan data dari masing-masing kategori jenis tablet.
2. Apakah ada asosiasi antara jenis tablet dan tingkat kemualan? Jelaskan asosiasi tersebut.
3. Apakah konsumsi tablet obat mual menyebabkan penurunan tingkat kemualan?

Salah satu alasan yang membuat kamu dapat menjawab dengan pasti untuk kasus di atas adalah efek obat mual yang memang diharapkan dapat mengurangi tingkat kemualan. Pembuatan obat juga biasanya telah menjalani proses penelitian yang sangat teliti dan panjang serta berfokus pada penyebabnya. Dengan demikian, kamu dapat mengatakan bahwa konsumsi obat mual menyebabkan penurunan tingkat kemualan. Ini adalah konsep **sebab-akibat** yang perlu dibedakan dengan **asosiasi**.

Ketika terdapat asosiasi antara dua variabel kategorikal, maka belum tentu bisa dikatakan bahwa terdapat hubungan sebab-akibat antara kedua variabel tersebut. Hubungan sebab-akibat membutuhkan desain penelitian yang kompleks agar dapat mengidentifikasi atau memastikan tidak ada variabel tersembunyi yang merupakan penyebab aslinya. Contohnya, mungkin saja 100 orang yang mengonsumsi tablet obat mual pada dasarnya mempunyai tingkat ketahanan mual yang tinggi dibandingkan 100 orang lainnya sehingga tablet obat mual sebenarnya tidak memberikan pengaruh apa-apa. Akan tetapi, dalam konteks pertanyaan di atas kamu tidak memiliki informasi seperti itu, dan masih banyak lagi variabel lainnya yang mungkin memengaruhi tingkat kemualan seseorang.

Hal lainnya yang mempermudah kamu menjawab pertanyaan di atas adalah jumlah sukarelawan yang sama banyak pada masing-masing kategori jenis tablet yaitu 100 orang sehingga pola distribusi jumlah sukarelawan pada tingkat kemualan terlihat secara jelas. Apa yang akan terjadi jika jumlah sukarelawan berbeda untuk masing-masing kategori jenis tablet? Lakukan eksplorasi berikutnya untuk mendapatkan jawabannya.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 1.7

Ada suatu rencana untuk membangun gedung balai pertemuan di tengah suatu kota. Rencana pembangunan itu menuai pendapat yang berbeda dari warga kota tersebut. Ada 500 warga sekitar lokasi yang dimintai pendapat tentang rencana pembangunan gedung balai pertemuan di kota itu. Hasil survei tersebut adalah sebagai berikut.

Jenis Kelamin	Pendapat			Jumlah
	Setuju	Tidak Setuju	Tidak Berpendapat	
Laki-laki	187	104	54	345
Perempuan	104	30	21	155
Jumlah	291	134	75	500

Jawablah pertanyaan di bawah ini berdasarkan tabel di atas dan berikan alasan yang kuat.

1. Apakah secara keseluruhan dapat dikatakan bahwa mayoritas warga sekitar setuju mengenai rencana pembangunan gedung balai pertemuan? Jelaskan jawabanmu.
2. Manakah yang lebih banyak setuju, warga laki-laki atau warga perempuan? Jelaskan jawabanmu.
3. Apakah ada asosiasi antara jenis kelamin dan pendapat? Berikan penjelasan penentu ada atau tidak adanya asosiasi tersebut.
4. Apakah jika seseorang memiliki jenis kelamin tertentu maka menyebabkan mereka memiliki suatu pendapat tertentu?

Eksplorasi 1.7 mungkin akan terlihat sama seperti **Eksplorasi 1.6**, tetapi kamu harus berhati-hati dengan jumlah laki-laki dan perempuan yang berbeda. Kamu harus melihat persentase dari keseluruhan dan bukan hanya sekadar melihat angka dalam tabel secara langsung. Dalam kasus ini, kamu memerlukan konsep frekuensi relatif.

Frekuensi relatif adalah persentase atau proporsi dari data yang merupakan bagian dari keseluruhan data. Pada proses analisis tertentu, terkadang diperlukan suatu frekuensi relatif yang hanya relatif terhadap salah satu variabel saja. Pada saat seperti itu kamu akan membutuhkan frekuensi relatif bersyarat. **Frekuensi relatif bersyarat** adalah persentase atau proporsi dari data yang merupakan bagian dari salah satu variabel dan variabel lainnya sebagai syarat.

Agar penerapan dan manfaat frekuensi relatif ini lebih mudah dipahami, kamu dapat melakukan **Eksplorasi 1.8** di dalam konteks yang sama dengan **Eksplorasi 1.7**.

**Eksplorasi 1.8****Pertanyaan No. 1**

Jelaskan apakah secara keseluruhan dapat dikatakan bahwa mayoritas warga sekitar setuju?

Lengkapilah tabel berikut ini untuk menghitung frekuensi relatif terhadap data keseluruhan yang berjumlah 500 orang.

Jenis Kelamin	Pendapat			Jumlah
	Setuju	Tidak Setuju	Tidak Berpendapat	
Laki-laki	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$
Perempuan	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$
Jumlah	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$

Jawablah kembali pertanyaan No. 1 di atas dan tunjukkan bagian mana dari tabel di atas yang mendukung jawabanmu?

Pertanyaan No. 2

Manakah yang lebih banyak setuju, warga laki-laki atau warga perempuan?

Lengkapilah tabel berikut ini untuk menghitung frekuensi relatif bersyarat variabel jenis kelamin.

Jenis Kelamin	Pendapat			Jumlah
	Setuju	Tidak Setuju	Tidak Berpendapat	
Laki-laki	$\frac{\dots}{345} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{345} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{345} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{345} \times 100\% = \dots\%$
Perempuan	$\frac{\dots}{155} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{155} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{155} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{155} \times 100\% = \dots\%$
Jumlah	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$

Jawablah kembali pertanyaan No. 2 di atas dan tunjukkan bagian mana dari tabel di atas yang mendukung jawabanmu?

Pertanyaan No. 3

Apakah ada asosiasi antara jenis kelamin dan pendapat? Berikan penjelasan penentu ada atau tidak adanya asosiasi tersebut.

Lengkapilah tabel berikut ini untuk menghitung frekuensi relatif bersyarat variabel pendapat.

Jenis Kelamin	Pendapat			Jumlah
	Setuju	Tidak Setuju	Tidak Berpendapat	
Laki-laki	$\frac{\dots}{291} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{134} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{75} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$
Perempuan	$\frac{\dots}{291} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{134} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{75} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$
Jumlah	$\frac{\dots}{291} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{134} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{75} \times 100\% = \dots\%$	$\frac{\dots}{500} \times 100\% = \dots\%$

Gambarlah diagram batang bertumpuk dari tabel di atas dengan variabel jenis kelamin terletak pada sumbu-x dan nilai frekuensi relatif bersyarat pendapat pada sumbu-y.

Jawablah kembali pertanyaan No. 3 di atas. Bagian mana dari tabel di atas dan gambar diagram batang bertumpuk yang mendukung jawabanmu? Untuk menjawab pertanyaan itu, kamu perlu melihat apakah terdapat perbedaan nilai frekuensi relatif pada jenis kelamin laki-laki pada setiap kategori pendapat dan ada juga perbedaan frekuensi relatif pada jenis kelamin perempuan pada setiap kategori pendapat. Jika jawabannya adalah **iya**, maka kemungkinan terdapat asosiasi antara jenis kelamin dan pendapat. Jika jawabannya **tidak**, maka tidak terdapat asosiasi antara jenis kelamin dan pendapat.

Pertanyaan No. 4

Apakah jika seseorang memiliki jenis kelamin tertentu maka menyebabkan mereka memiliki suatu pendapat tertentu?

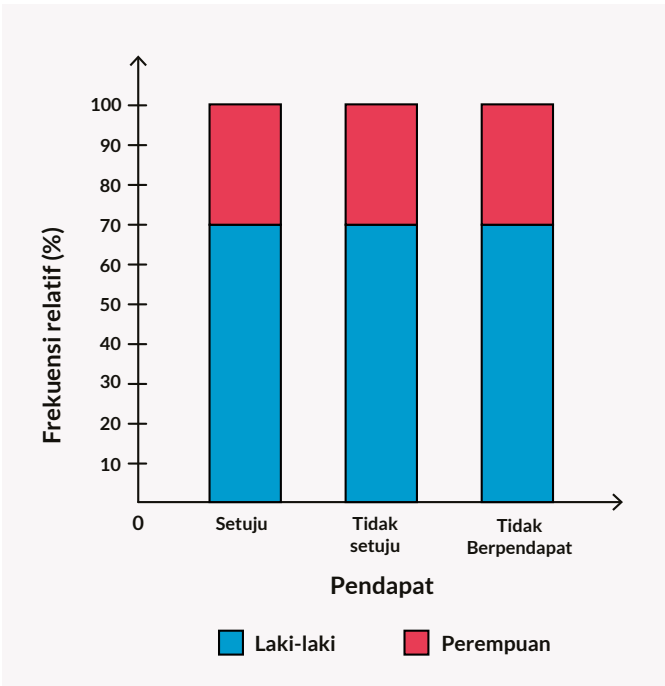
Jelaskan apakah konsep frekuensi relatif membantumu dalam menjawab pertanyaan ini?

Setelah melakukan **Eksplorasi 1.8**, kamu pasti sudah mendapatkan gambaran cara kerja frekuensi relatif dan frekuensi relatif bersyarat dalam proses analisis data sederhana. Frekuensi relatif bersyarat sangat penting di dalam proses menjawab pertanyaan tentang asosiasi antara dua variabel kategorikal. Jika nilai frekuensi relatif bersyarat suatu variabel berbeda-beda antarkategori variabel lainnya, bisa disimpulkan ada asosiasi antara kedua

variabel kategorikal tersebut. Jika nilai frekuensi relatif suatu variabel sama antarkategori variabel lainnya sama, bisa disimpulkan tidak ada asosiasi antara kedua variabel kategorikal tersebut.

Pada beberapa kasus, kecenderungan data tidak terlihat sehingga kamu akan kesulitan untuk menentukan asosiasi antara dua variabel kategorikal. Dalam hal ini, kamu dapat melihat perbedaan frekuensi relatif bersyarat yang tersebar antarkategori untuk melihat adanya asosiasi antara dua variabel kategorikal. Pada batasan ini, kamu bisa memutuskan ada atau tidaknya asosiasi, tetapi tidak selalu bisa mendeskripsikan asosiasi yang ada.

Perhatikan diagram batang bertumpuk yang menunjukkan tidak adanya asosiasi antara dua variabel kategorikal.



Gambar 1.2 Diagram Batang Antara Dua Variabel yang Tidak Ada Asosiasi

Diagram batang bertumpuk di atas menunjukkan bahwa frekuensi relatif dari jenis kelamin laki-laki dan perempuan untuk semua kategori pendapat memiliki nilai yang sama. Hal itu menunjukkan bahwa tidak ada hubungan antara variabel jenis kelamin dan variabel pendapat. Di dalam beberapa kasus, meskipun terdapat perbedaan frekuensi relatif tetapi hanya sedikit perbedaan maka bisa juga menunjukkan bahwa tidak adanya asosiasi antara dua variabel

kategorikal tersebut. Dengan kata lain, semakin bervariasi frekuensi relatif suatu variabel terhadap variabel lain maka akan semakin terlihat asosiasinya.

Jika kamu ingin mengetahui standar ukur yang pasti untuk menentukan asosiasi antara dua variabel kategorikal ada atau tidak, kamu bisa menggunakan suatu teknik analisis data bivariat khusus. Namun, pelajaran Matematika Kelas XI tidak akan membahas sejauh itu. Jika kamu tertarik, kamu dapat melakukan eksplorasi secara mandiri melalui berbagai sumber yang benar dan terpercaya.

Ingat kembali bahwa ketika terdapat asosiasi antara dua variabel kategorikal maka belum tentu bisa dikatakan bahwa terdapat hubungan sebab-akibat antara kedua variabel tersebut. Dalam hal ini, ketika terdapat asosiasi antara jenis kelamin dan pendapat maka tidak dapat disimpulkan bahwa kedua variabel tersebut mempunyai hubungan sebab-akibat. Frekuensi relatif tidak dapat membantumu untuk menjawab pertanyaan ini. Responden yang setuju terhadap pembangunan balai pertemuan mungkin bertempat tinggal jauh dari lokasi gedung balai pertemuan. Sebaliknya, responden yang tinggal di sekitar lokasi tersebut cenderung tidak setuju karena khawatir pembangunan balai pertemuan akan menimbulkan kemacetan dan keramaian. Untuk mencari tahu penyebab pendapat responden, maka metode pengumpulan data dalam bentuk wawancara akan menjadi pilihan yang baik agar dapat mengetahui alasan warga mempunyai pendapat tertentu dibandingkan hanya sekadar mengetahui pendapat akhirnya.

Latihan 1.3

- Seorang siswa melakukan survei mengenai pilihan binatang peliharaan antara anjing dan kucing kepada teman-temannya di sekolahnya. Berikut ini adalah hasil survei dari 30 siswa.

Jenis Kelamin	Binatang Peliharaan
Laki-laki	Kucing
Perempuan	Anjing
Laki-laki	Kucing
Laki-laki	Kucing
Perempuan	Kucing
Laki-laki	Anjing
Laki-laki	Kucing
Laki-laki	Kucing
Perempuan	Anjing
Laki-laki	Anjing

Jenis Kelamin	Binatang Peliharaan
Perempuan	Anjing
Laki-laki	Kucing
Perempuan	Anjing
Laki-laki	Anjing
Perempuan	Anjing
Perempuan	Anjing
Laki-laki	Kucing
Laki-laki	Kucing
Perempuan	Kucing
Laki-laki	Kucing

Jenis Kelamin	Binatang Peliharaan
Laki-laki	Kucing
Perempuan	Kucing
Perempuan	Anjing
Perempuan	Anjing
Laki-laki	Kucing
Perempuan	Anjing
Perempuan	Kucing
Laki-laki	Kucing
Perempuan	Kucing
Perempuan	Kucing

- Buatlah tabulasi silang dari data tabel di atas.
 - Pilihan binatang peliharaan apa yang paling banyak dipilih?
 - Jelaskan kecenderungan jenis kelamin terhadap pilihan binatang peliharaan.
- Berikut ini suatu hasil survei lapangan mengenai keberadaan tanggul sungai dan risiko banjir. Survei dilakukan di empat kota yaitu Semarang, Salatiga, Pekalongan, dan Surakarta di Provinsi Jawa Tengah.

Kota	Tanggul Sungai	Risiko Banjir
Semarang	Ada	Tidak Banjir
Semarang	Tidak Ada	Banjir
Semarang	Ada	Banjir
Semarang	Ada	Tidak Banjir
Semarang	Tidak Ada	Banjir
Semarang	Tidak Ada	Banjir
Semarang	Ada	Banjir
Semarang	Tidak Ada	Tidak Banjir

Kota	Tanggul Sungai	Risiko Banjir
Pekalongan	Ada	Banjir
Pekalongan	Tidak Ada	Banjir
Pekalongan	Ada	Tidak Banjir
Pekalongan	Tidak Ada	Banjir
Pekalongan	Ada	Tidak Banjir
Pekalongan	Ada	Tidak Banjir
Pekalongan	Tidak Ada	Banjir
Pekalongan	Tidak Ada	Tidak Banjir

Kota	Tanggul Sungai	Risiko Banjir	Kota	Tanggul Sungai	Risiko Banjir
Semarang	Tidak Ada	Banjir	Pekalongan	Ada	Banjir
Semarang	Tidak Ada	Banjir	Pekalongan	Ada	Banjir
Salatiga	Ada	Tidak Banjir	Surakarta	Tidak Ada	Banjir
Salatiga	Tidak Ada	Tidak Banjir	Surakarta	Ada	Tidak Banjir
Salatiga	Tidak Ada	Banjir	Surakarta	Ada	Tidak Banjir
Salatiga	Ada	Tidak Banjir	Surakarta	Tidak Ada	Tidak Banjir
Salatiga	Ada	Tidak Banjir	Surakarta	Ada	Banjir
Salatiga	Ada	Tidak Banjir	Surakarta	Tidak Ada	Banjir
Salatiga	Tidak Ada	Banjir	Surakarta	Tidak Ada	Banjir
Salatiga	Tidak Ada	Banjir	Surakarta	Ada	Tidak Banjir
Salatiga	Tidak Ada	Tidak Banjir	Surakarta	Tidak Ada	Banjir
Salatiga	Ada	Banjir	Surakarta	Ada	Banjir

- Buatlah tabulasi silang dari data tabel di atas.
 - Apakah ada asosiasi antara keberadaan tanggul sungai dan risiko banjir? Jelaskan alasan adanya asosiasi tersebut.
3. Suatu sekolah mengadakan pemilihan ketua OSIS dari 2 calon ketua OSIS. Banyak siswa pada sekolah tersebut adalah 500 siswa yang terdiri atas 178 siswa kelas X, 165 siswa kelas XI, dan 157 siswa kelas XII. Pemilihan suara dilakukan pada 3 ruang kelas dengan campuran siswa kelas X, XI, dan XII. Hasil perhitungan suara adalah sebagai berikut.

Hasil Perhitungan Suara Ruang Kelas A

Calon Ketua OSIS	Kelas		
	X	XI	XII
Arif	35	28	23
Amira	27	29	26

Hasil Perhitungan Suara Ruang Kelas B

Calon Ketua OSIS	Kelas		
	X	XI	XII
Arif	28	27	28
Amira	30	25	25

Hasil Perhitungan Suara Ruang Kelas C

Calon Ketua OSIS	Kelas		
	X	XI	XII
Arif	29	30	29
Amira	29	26	26

- Buatlah tabel tunggal yang berisi gabungan semua data tabel di atas.
- Ubahlah masing-masing tabel di atas menjadi bentuk matriks,

c.

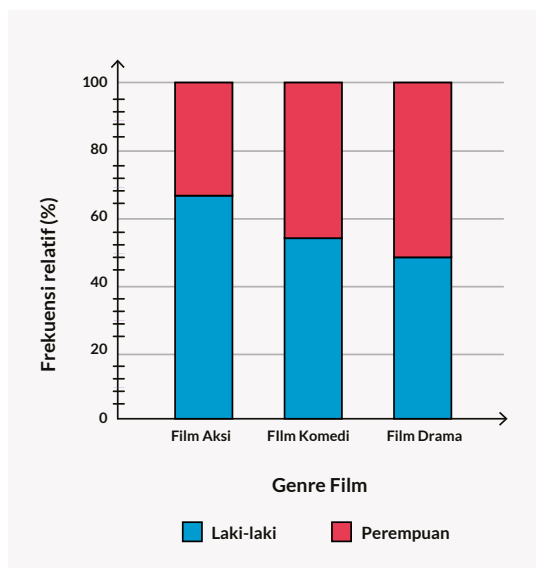


Ayo, Berpikir Kritis

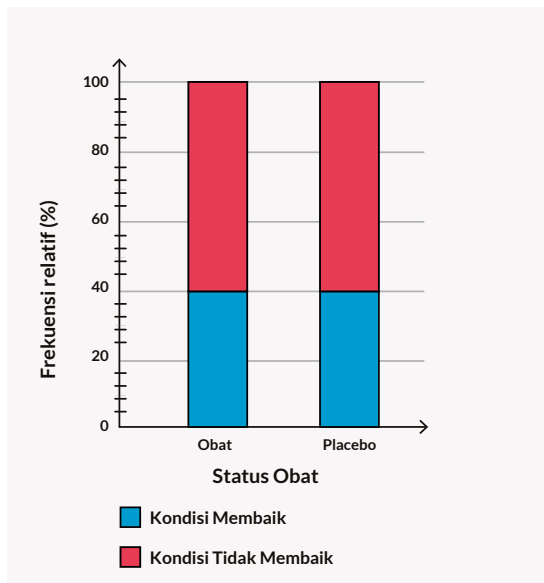
Calon ketua OSIS mana yang mendapatkan perolehan suara terbanyak dari siswa Kelas XII jika dilihat dari total suara masing-masing kandidat?

- Perhatikan diagram batang bertumpuk berikut ini dan tentukan apakah ada asosiasi antara kedua variabel kategorikal tersebut.

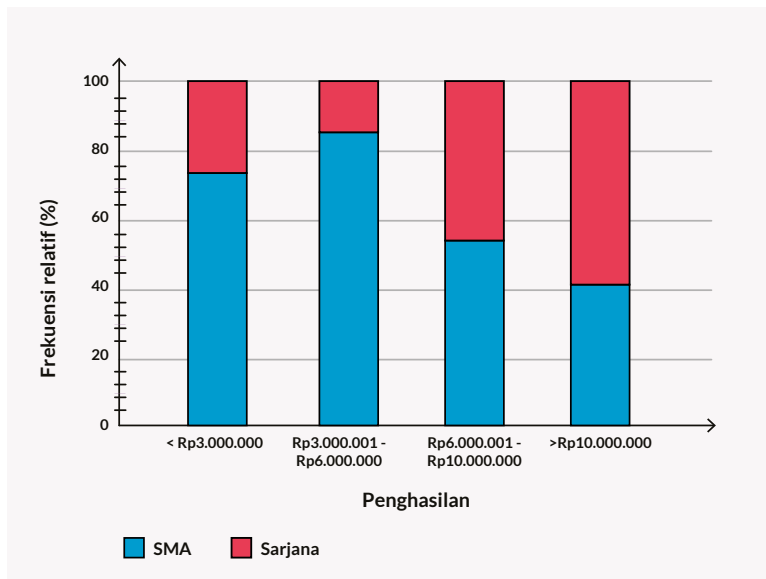
- Jenis Kelamin dan Genre Film



b. Status Obat dan Kondisi Kesehatan



c. Penghasilan dan Jenjang Pendidikan



5. Suatu badan penelitian mengadakan survei mengenai pilihan media informasi dengan mengambil responden secara acak. Berikut ini adalah hasil survei yang telah dilakukan.

Jenis Kelamin	Media Informasi			Jumlah
	TV	Radio	Koran	
Laki-laki	295	165	320	780
Perempuan	110	295	185	590
Jumlah	405	460	505	1370

- Pada masing-masing jenis media informasi, jenis kelamin apa yang cenderung memilih media informasi tersebut?
 - Media informasi apa yang cenderung dipilih oleh laki-laki dan yang cenderung dipilih oleh perempuan?
 - Apakah ada asosiasi antara jenis kelamin dan media informasi? Berikan penjelasan penentu ada atau tidak adanya asosiasi tersebut.
6. Perhatikan tabel berikut ini.

Tabel 1.2 Partisipasi Sekolah Tahun 2023 di Indonesia

Kelompok Umur	Partisipasi Sekolah			Jumlah
	Tidak/Belum Pernah Sekolah	Masih Sekolah	Tidak Sekolah Lagi	
7–12	0,70%	99,16%	0,14%	100%
13–15	0,41%	96,10%	3,49%	100%
16–18	0,62%	73,42%	25,96%	100%
19–24	0,87%	26,85%	72,28%	100%
Jumlah	0,69%	71,23%	28,08%	100%

Sumber: <https://www.bps.go.id/id/>

- Jelaskan kecenderungan yang terlihat dari data di atas.
- Apakah ada asosiasi antara kelompok umur dan partisipasi sekolah? Berikan penjelasan penentu ada atau tidak adanya asosiasi tersebut.

7. Suatu survei dilakukan di suatu tempat umum dengan memilih responden secara acak dengan syarat responden harus minimal berusia 15 tahun. Hasil survei tersebut adalah sebagai berikut.

Tabel 1.3 Kelompok Umur dan Status Bekerja

Kelompok Umur	Status Bekerja	
	Bekerja	Tidak Bekerja
15–19	45	186
20–24	124	254
25–29	152	116
30–34	158	61
35–39	161	44
40–44	159	40
45–49	149	35
50–54	133	32
55–59	105	25
60+	166	49

Sumber: <https://www.bps.go.id/id/>

- Jelaskan kecenderungan yang terlihat dari data di atas.
- Apakah ada asosiasi antara kelompok umur dan status bekerja? Berikan penjelasan penentu ada atau tidak adanya asosiasi tersebut.
- 
Ayo, Berpikir Kritis

Menurutmu, hal apa yang menyebabkan penurunan orang yang bekerja pada pada usia 60+?



Ayo, Berefleksi

Mari kita merefleksikan kembali hal-hal apa saja yang telah kamu pelajari.

1. Apakah saya sudah bisa membuat tabulasi silang dari dua variabel kategorikal?
2. Apakah saya sudah bisa menyajikan tabulasi silang dalam nilai frekuensi relatif?
3. Apakah saya sudah bisa menyajikan tabel dalam bentuk matriks?
4. Apakah saya sudah bisa mengidentifikasi dan menjelaskan hubungan antara dua variabel kategorikal?

D. Hubungan antara Dua Variabel Numerikal

Kamu telah belajar mengenai diagram pencar dan konsep dasar mengenai korelasi di kelas X. Korelasi adalah istilah yang sering digunakan untuk menyatakan asosiasi antara dua variabel numerikal. Pada bagian ini kamu akan mengingat kembali materi mengenai diagram pencar dan dilanjutkan dengan pembahasan lebih dalam mengenai korelasi serta model garis linear terbaik (*best-fit*) untuk melengkapi proses analisis hubungan antara dua variabel numerikal yang dibutuhkan secara utuh.

1. Diagram Pencar

Diagram pencar digunakan saat kamu perlu menyajikan data yang terdiri atas dua variabel numerikal. Lakukan eksplorasi berikut ini untuk mengingat kembali mengenai konsep diagram pencar dan mengidentifikasi kemungkinan hubungan antara dua variabel numerikal.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 1.9

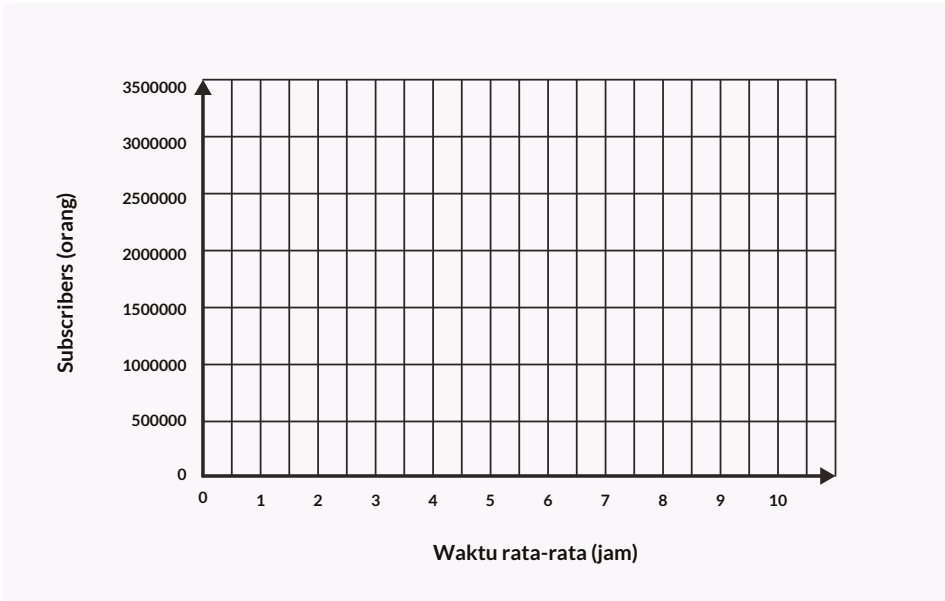
Dalam suatu penelitian sederhana, terpilih sampel tujuh artis media sosial dan diperoleh informasi mengenai rata-rata waktu yang didedikasikan per hari dan

banyak *subscribers* mereka pada saat itu (dibulatkan ke ratusan ribu). Informasi yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Rata-rata waktu per hari	Banyak <i>subscribers</i>
5,5 jam	1.400.000 orang
8,3 jam	2.400.000 orang
3,8 jam	1.300.000 orang
6,1 jam	1.600.000 orang
3,3 jam	900.000 orang
4,9 jam	1.500.000 orang
6,7 jam	1.700.000 orang

Peneliti ingin mengetahui apakah ada hubungan antara rata-rata waktu yang didedikasikan per hari dan banyak *subscribers* dari data yang diperoleh di atas.

1. Sajikan data dari tabel di atas ke dalam bentuk diagram pencar. Ayo letakkan pasangan-pasangan data rata-rata waktu dan banyak *subscribers* dalam bentuk pasangan titik koordinat (rata-rata waktu, banyak *subscribers*) dalam diagram di bawah ini.



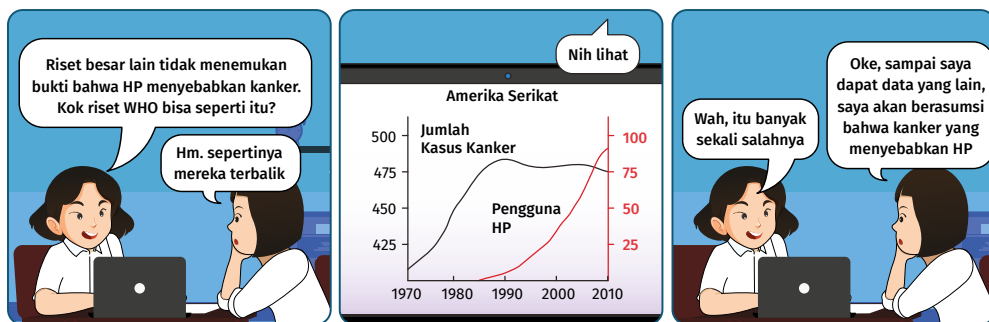
2. Bagaimana pola penyebaran titik-titik yang telah digambar pada diagram di atas?
3. Kesimpulan seperti apa yang dapat kamu ambil mengenai hubungan antara rata-rata waktu yang didedikasikan dan banyak *subscribers* berdasarkan pola penyebaran titik-titik pada No. 2?
4. Data mana yang tidak konsisten dengan kesimpulanmu pada No. 3?
5. Apakah data tersebut akan membuat kesimpulanmu pada No. 4 menjadi tidak tepat?

Tergantung pada proses analisis yang akan dilakukan setelah menggambar suatu diagram pencar maka kamu juga perlu mengetahui peletakan variabel yang tepat. Pada contoh permasalahan di atas, rata-rata waktu disebut sebagai **variabel independen**. Variabel independen adalah variabel yang akan digunakan untuk membuat prediksi terhadap nilai variabel dependen. Variabel independen digambarkan pada bagian sumbu-x di diagram pencar, sedangkan banyak subscribers disebut sebagai variabel dependen. **Variabel dependen** adalah variabel yang nilainya dipengaruhi oleh variabel independen. Variabel dependen digambarkan pada sumbu-y di diagram pencar.



Ayo, Berkomunikasi

Coba analisis, apa yang akan terjadi jika variabel X dan Y pada contoh permasalahan di atas tertukar? Diskusikan dengan teman-temanmu dan buatlah kesimpulan.



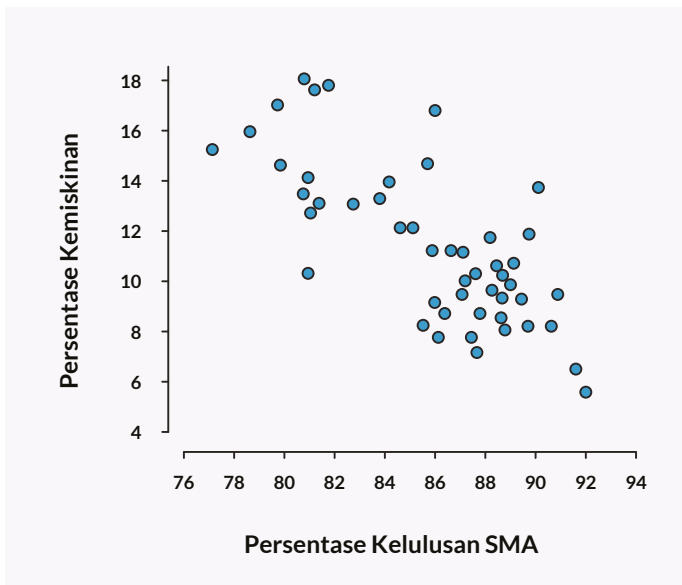
Gambar 1.3 Contoh kesimpulan yang salah akibat variabel X dan Y yang tertukar
Sumber: <https://xkcd.com>

Di dalam permasalahan Matematika, konteks soal akan memberikan informasi yang cukup jelas untuk membedakan antara variabel independen dan dependen. Jika terdapat keraguan maka kamu dapat menganalisis kondisi

tersebut menggunakan akal sehat sehingga tidak terjadi kesalahan mengambil kesimpulan yang ditunjukkan oleh **Gambar 1.3**.

Latihan 1.4

1. Perhatikan pasangan-pasangan variabel di bawah ini. Tentukan bagaimana hubungan mereka dan berikan alasanmu.
 - a. Banyak kendaraan bermotor dan tingkat polusi udara.
 - b. Jarak yang ditempuh oleh sebuah motor dan volume bensin dalam tangki bensin.
 - c. Biaya listrik dan biaya air per bulan.
2. Rizki ingin mengetahui hubungan tingkat kelulusan SMA dan tingkat kemiskinan. Data yang diperoleh oleh Rizki disajikan dalam bentuk diagram pencar berikut.



- a. Bagaimana pola penyebaran titik-titik yang telah digambar pada diagram di atas?
- b. Kesimpulan seperti apa yang dapat kamu ambil mengenai hubungan persentase kelulusan SMA dan persentase kemiskinan?

3. Tabel berikut ini memberikan informasi mengenai kandungan gula (gram) dan jumlah kalori dalam satu sajian dari 13 sampel suatu merek sereal.

Gula (gram)	4	15	12	11	8	6	14	2	7	14	20	3	13
Kalori	120	200	140	110	120	80	170	100	130	190	190	110	120

- Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
- Bagaimana pola penyebaran titik-titik yang telah digambar pada diagram di atas?
- Kesimpulan seperti apa yang dapat kamu ambil mengenai hubungan antara gula (gram) dan jumlah kalori?

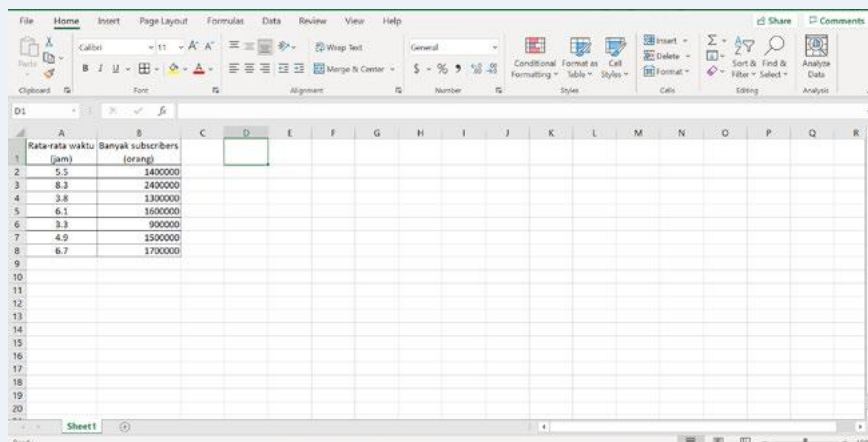


Ayo, Menggunakan Teknologi

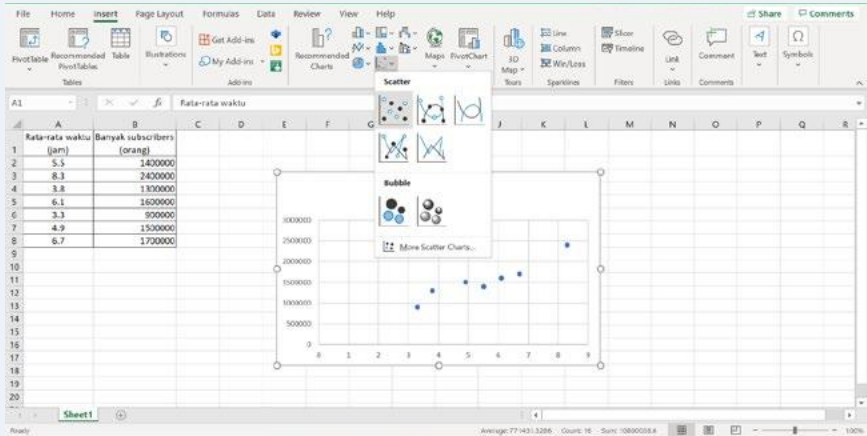
Ayo sekarang saatnya kita mencoba menggunakan teknologi untuk menggambar diagram pencar. Penggunaan teknologi ini akan memudahkan kamu dalam menggambar dan menganalisis data dalam jumlah yang banyak serta memberikan efisiensi dalam pengerjaannya. Aplikasi yang dapat kamu gunakan sebenarnya cukup banyak, tetapi buku ini hanya akan memberikan panduan penggunaan Microsoft Excel sebagai salah satu aplikasi yang paling umum digunakan. Kamu dapat mengeksplorasi secara mandiri untuk penggunaan aplikasi lainnya melalui berbagai informasi dari buku dan sumber yang tepat dan baik dari internet.

Tahapan menggambar diagram pencar menggunakan Microsoft Excel:

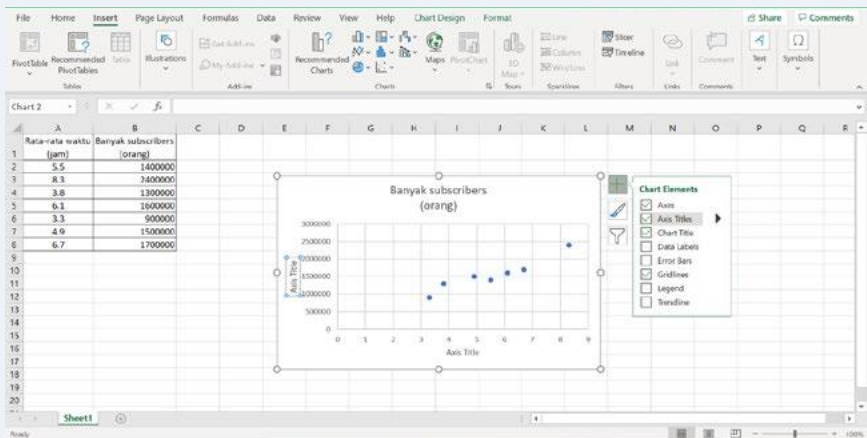
- Buka aplikasi Microsoft Excel dan buat lembar kerja baru kosong.
- Masukkan data bivariat yang akan dibuat diagram pencarnya.



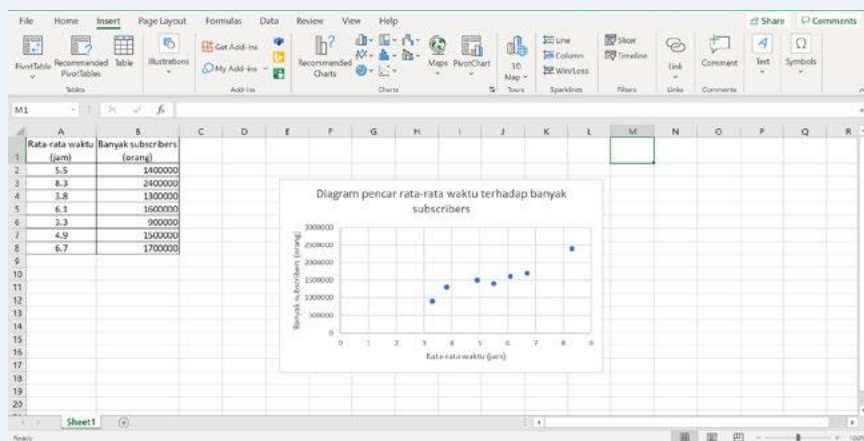
3. Pilihlah semua datanya, kemudian pilih menu **Insert** dan pilih **Scatter Plot** yang posisinya ditunjukkan oleh gambar di bawah (posisi kemungkinan akan berbeda tergantung dari versi Microsoft Excel yang digunakan) maka secara otomatis diagram pencar akan dibuat, tetapi masih perlu penyesuaian penamaan variabel x dan y.



4. Klik diagram kemudian klik tanda “+” yang ada di kanan atas diagram dan pastikan “Axis Titles” dicentang maka akan terlihat bagian untuk penamaan untuk sumbu-x dan sumbu-y.



5. Ubahlah penamaan sumbu-x dan sumbu-y, dan judul diagram pencar dengan cara klik pada bagian masing-masing dan ketik penamaan yang baru.



Mudah, bukan? Ayo, sering-seringlah berlatih menggunakan aplikasi ini agar kamu ingat tahapannya. Kamu juga dapat menggunakan aplikasi ini untuk memastikan bahwa gambar diagram pencar yang kamu buat dengan gambar tangan sudah tepat atau belum.

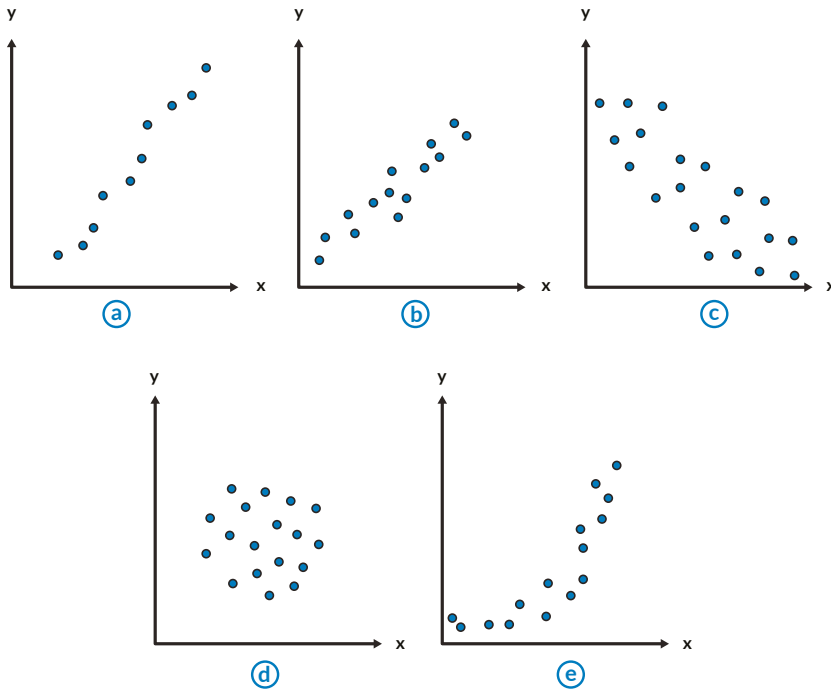
2. Korelasi

Untuk menentukan apakah dua variabel numerikal memiliki hubungan atau tidak maka kamu perlu melihat arah dan bentuk tren datanya. Dalam permasalahan rata-rata waktu dan banyak *subscribers* pada bagian sebelumnya, diperoleh bahwa kedua variabel tersebut mempunyai **korelasi positif** yang artinya adalah semakin meningkat rata-rata waktu maka semakin meningkat juga banyak *subscribers*, dan bentuk tren data mereka adalah **linear** karena pola tren data yang menyerupai garis lurus. Kita akan mempelajari lebih banyak lagi melalui **Eksplorasi 1.10** berikut ini.



Eksplorasi 1.10

Perhatikan diagram berbagai jenis korelasi berikut ini.



Gambar 1.4 Arah dan Bentuk Tren Diagram Pencar

1. Pasangkan (a), (b), (c), (d), dan (e) dengan pilihan kategori A, B, C, D atau E yang tepat sesuai deskripsi pada tabel di bawah ini berdasarkan kolom bentuk tren data dan interpretasi data. Pilihan kategori boleh untuk lebih dari satu diagram. Diskusikan dengan teman-temanmu.

	Jenis korelasi berdasarkan arah tren data	Bentuk tren data	Interpretasi data
A	Korelasi positif	Linear	Semakin meningkat nilai variabel x , semakin meningkat nilai variabel y
B	Korelasi negatif	Linear	Semakin meningkat nilai variabel x , semakin menurun nilai variabel y
C	Tidak berkorelasi	Tidak berbentuk	Nilai variabel x tidak memengaruhi nilai variabel y
D	Korelasi positif	Kurva/ Nonlinear	Semakin meningkat nilai variabel x , semakin meningkat nilai variabel y
E	Korelasi negatif	Kurva/ Nonlinear	Semakin meningkat nilai variabel x , semakin menurun nilai variabel y

2. Jika ada kategori yang tidak mendapatkan pasangan dari diagram-diagram di atas, gambarlah sketsa diagram pencar yang menggambarkan kategori tersebut.

Berdasarkan hasil **Eksplorasi 1.10**, kamu telah mempelajari mengenai jenis korelasi berdasarkan arah tren data (**korelasi positif**, **korelasi negatif**, dan **tidak berkorelasi**), bentuk tren data (**linear** dan **kurva/nonlinear**) dan interpretasi masing-masing datanya. Kamu akan mempelajari lebih jauh lagi mengenai hal ini pada subbab berikutnya tentang bagaimana proses analisis korelasi untuk tren data berbentuk linear. Pada jenjang ini, kamu tidak akan mempelajari mengenai proses analisis korelasi untuk tren data berbentuk kurva/nonlinear.



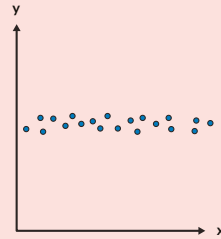
Ayo, Berpikir Kreatif

Gambarlah suatu diagram pencar yang memiliki bentuk tren data kurva/nonlinear, namun arah tren data tidak menunjukkan korelasi positif maupun negatif. Berikan interpretasi data dari diagram pencar yang telah kamu gambar.



Ayo, Berpikir Kritis

Apakah diagram pencar berikut ini menunjukkan adanya korelasi antara dua variabel? Jelaskan.



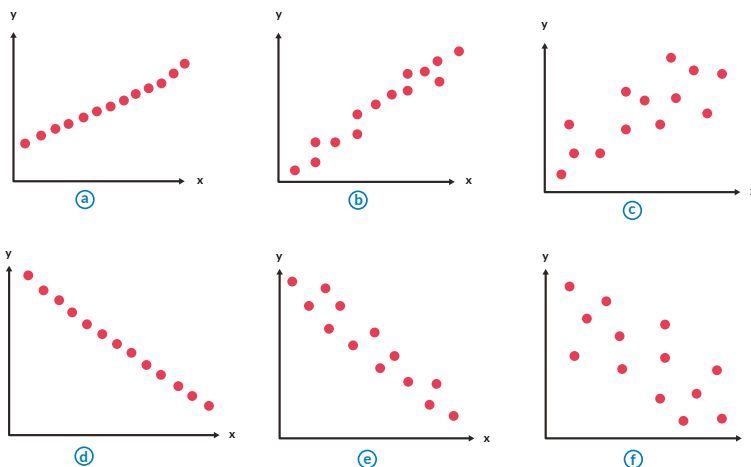
Korelasi adalah pengukur hubungan dua variabel yang dinyatakan dengan tingkat hubungan antarvariabel. Dalam analisis korelasi tidak mempersoalkan apakah nilai variabel yang satu tergantung pada nilai variabel yang lain atau sebaliknya sehingga tidak ada istilah variabel independen dan dependen yang perlu digunakan. Selain melihat pada jenis korelasi antara dua variabel numerikal, kamu juga perlu melihat pada tingkat korelasinya. Lakukan **Eksplorasi 1.11** mengenai cara melihat tingkat korelasi berdasarkan arah dan bentuk tren data pada diagram pencar.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 1.11

Perhatikan diagram pencar berikut ini.



Gambar 1.5 Penyebaran Data Diagram Pencar

1. Gambarlah suatu garis lurus yang mewakili data dari masing-masing diagram pencar.
2. Tanpa perlu melakukan pengukuran dan perhitungan, perhatikan penyebaran titik-titik yang tidak dilalui oleh garis kemudian urutkanlah diagram di atas berdasarkan penyebaran titik-titik tersebut terhadap garis yang telah digambar dimulai dari yang paling rapat hingga paling menyebar. Buatlah urutan tersebut untuk masing-masing jenis korelasi yaitu urutan untuk korelasi positif dan korelasi negatif.

Berdasarkan hasil **Eksplorasi 1.11**, diagram pencar yang mendapatkan urutan pertama dikatakan memiliki tingkat korelasi yang lebih kuat dari urutan kedua dan ketiga, dan diagram pencar urutan kedua memiliki tingkat korelasi yang lebih kuat dari urutan ketiga. Secara umum, semakin rapat titik-titik data membentuk suatu garis maka semakin kuat tingkat korelasinya. Akan tetapi, semakin menyebar titik-titik data dari suatu garis maka semakin lemah tingkat korelasinya hingga tidak mempunyai korelasi. Pada dasarnya kamu dapat membagi tingkat korelasi menjadi tiga tingkat korelasi, yaitu kuat, sedang, dan lemah. Kamu tidak diwajibkan untuk menggunakan deskripsi tingkat korelasi ini karena akan mengalami kesulitan dalam memutuskan tingkat korelasi dengan hanya sebatas melihat diagram pencar. Untuk menentukan secara pasti tingkat korelasi, kamu perlu menghitung nilai koefisien korelasinya. Kamu dapat mempelajari mengenai cara menghitung dan menginterpretasikan nilai koefisien korelasi pada bagian pengayaan.

Jika kamu sudah memutuskan bahwa dua variabel mempunyai korelasi, apakah kamu dapat menyimpulkan bahwa kedua variabel tersebut mempunyai hubungan sebab-akibat? Ayo, lakukan **Eksplorasi 1.12** untuk mendapatkan jawaban tersebut.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 1.12

Banyu tertarik untuk melihat hubungan antara harga rumah dan kecepatan internet yang diukur dengan waktu yang dibutuhkan untuk mengunduh sebuah dokumen sebesar 10 MB.

Waktu (detik)	5,2	5,5	5,8	6,0	6,8	8,3	9,3	13	13,6	16,0
Harga Rumah (Juta Rupiah)	300	310	270	285	255	245	210	190	175	150

1. Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
2. Tentukan jenis korelasi dari kedua variabel tersebut.
3. Banyu mengatakan bahwa data tersebut menunjukkan bahwa internet yang lambat mengurangi harga rumah. Apakah pendapat Banyu benar? Berikan alasanmu.

Sama halnya dengan asosiasi antara dua variabel kategorikal. Hal lain yang perlu dibedakan saat mempelajari hubungan antara dua variabel numerikal adalah konsep **korelasi** dan **sebab-akibat**. Dua variabel dikatakan mempunyai hubungan sebab-akibat jika perubahan pada salah satu variabel akan mengakibatkan perubahan pada variabel lainnya. Hanya karena dua variabel memiliki korelasi, tidak berarti selalu ada hubungan sebab-akibat pada keduanya karena korelasi hanya melihat pada tren data. Terkadang hubungan sebab-akibat dapat dijelaskan dengan menggunakan akal sehat, tetapi akan jauh lebih baik jika ada kajian pustaka yang mendukung pemikiran tersebut.



Penguatan Karakter

Jadi, berhati-hatilah setiap kali mengambil kesimpulan karena kesimpulan yang tidak tepat dapat mengakibatkan efek negatif bagi berbagai cabang ilmu pengetahuan serta kehidupan sosial dan bernegara.



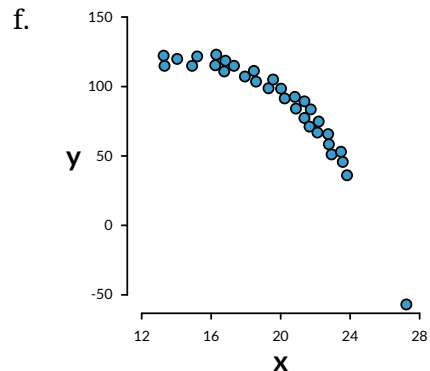
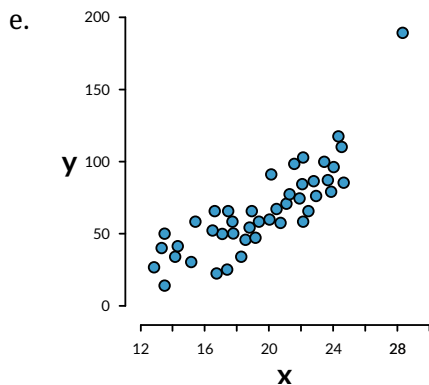
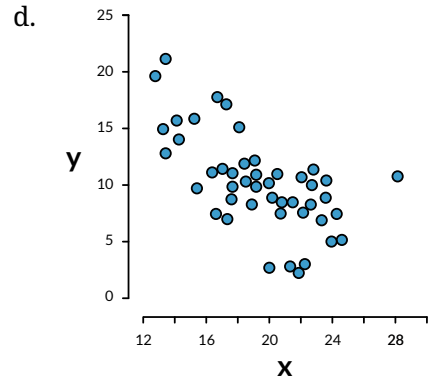
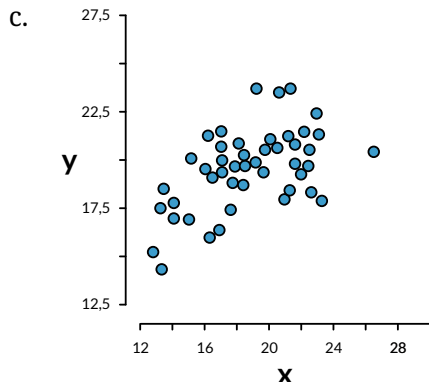
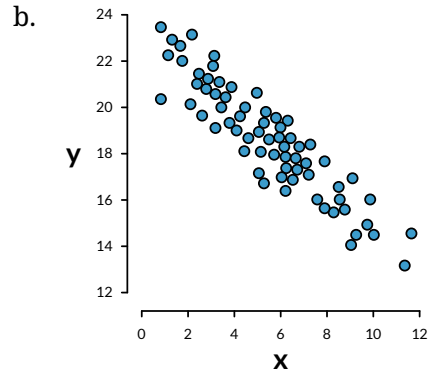
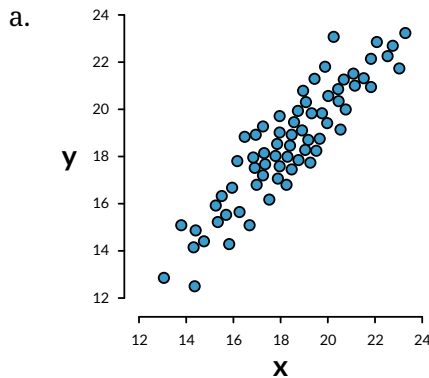
Ayo, Berpikir Kreatif

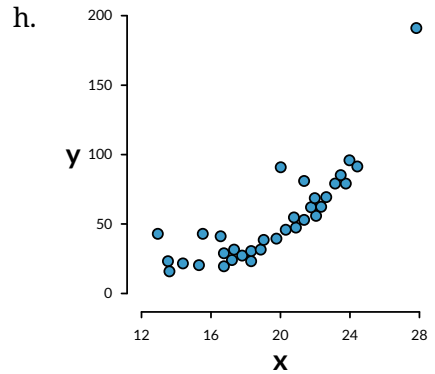
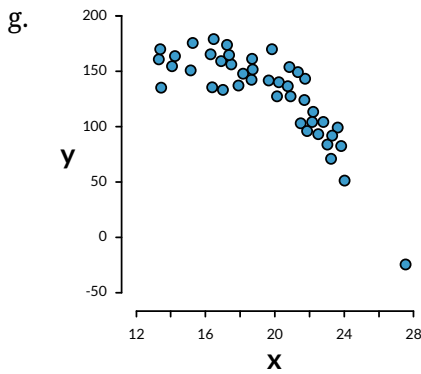
1. Menurutmu, hal-hal negatif apa saja yang mungkin akan terjadi jika terdapat kesimpulan-kesimpulan yang salah baik di dalam cabang ilmu pengetahuan, dan kehidupan sosial dan bernegara?
2. Menurutmu, apa yang harus kamu lakukan untuk menghindari pengambilan kesimpulan yang salah?
3. Menurutmu, apa yang dapat kamu lakukan untuk menjaga diri sendiri, kehidupan akademik, sosial, dan bernegara dari berbagai informasi dengan dasar kesimpulan yang salah?

Ayo latihan untuk memantapkan keterampilan dalam membaca diagram pencar dan interpretasi datanya.

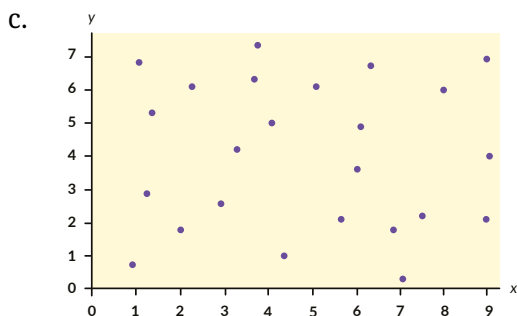
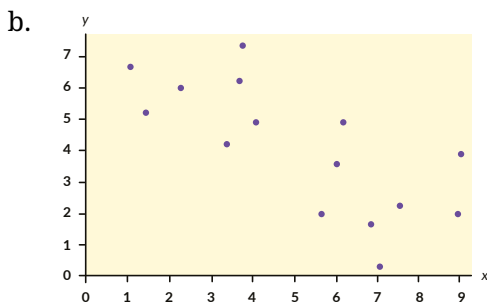
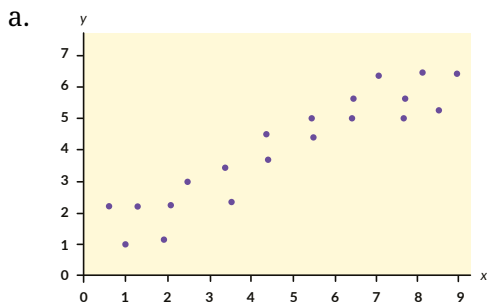
Latihan 1.5

- Pada masing-masing diagram pencar di bawah ini, berikan keterangan (i) jenis korelasi berdasarkan arah tren data, (ii) bentuk tren data, dan (iii) interpretasi data.





2. Apakah diagram pencar berikut terlihat linear, nonlinear/kurva atau tidak berkorelasi? Kuat atau lemah? Positif atau negatif?



3.



Ayo, Berpikir Kreatif

Suatu hari saat pelajaran Matematika, guru menyajikan data mengenai hubungan antara dua variabel dari tinggi badan anak usia dini dari umur 2 hingga 7 tahun dalam bentuk tabel berikut ini.

Umur	Tinggi rata-rata (cm)
2	91
3	99
4	104
5	112
6	119
7	126

Salah seorang siswa bernama Kefas menyimpulkan bahwa semakin bertambah umur, semakin bertambah juga tinggi badan. Namun, tidak tepat jika disimpulkan bahwa umur menyebabkan tinggi badan meskipun memang ada yang mendasari hubungan sebab-akibat antara keduanya.

- Menurutmu, apa yang menjadi dasar sebab-akibat antara umur dan tinggi badan berdasarkan konteks data di atas?
- Apakah kesimpulan Kefas berlaku untuk sepanjang umur manusia hidup? Jelaskan alasanmu.
- Jika kamu diminta untuk mengambil kesimpulan secara umum mengenai hubungan umur dan tinggi badan, apa yang perlu kamu lakukan?

3. Model Linear Terbaik (*Best-fit*)

Ketika dua variabel numerikal pada suatu diagram pencar sudah menunjukkan adanya korelasi linear baik positif maupun negatif, kamu dapat menggambar suatu garis untuk mewakili semua data yang ada. Garis lurus ini diharapkan menggambarkan arah dan tren data tersebut sehingga kamu dapat memprediksi suatu nilai variabel dependen jika nilai dari variabel independennya berubah. Ayo, lakukan **Eksplorasi 1.13** dengan langsung mempraktikkan caranya.

**Eksplorasi 1.13**

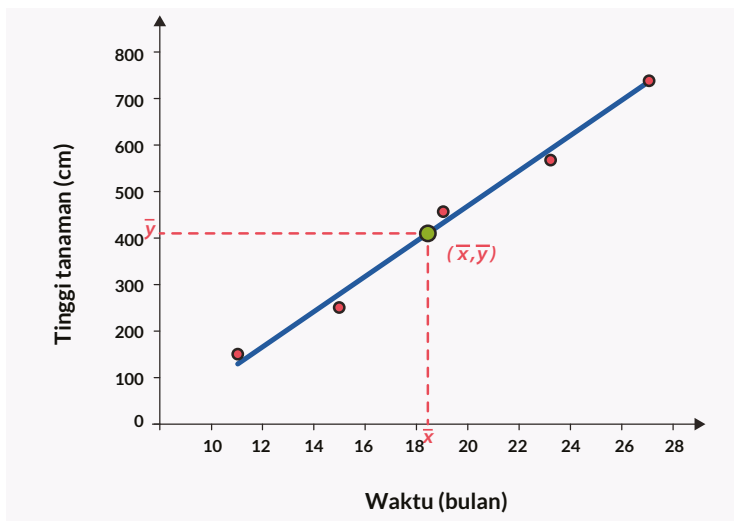
SMA Nusantara menerapkan program rajin menabung kepada seluruh siswanya. Mona tertarik untuk melihat bagaimana hubungan antara uang jajan yang diperoleh teman-temannya dan besar uang yang ditabung. Dia memilih satu kelas dan dari kelas tersebut diambil sampel delapan siswa untuk memperoleh data mengenai uang jajan yang diterima dan uang yang ditabung. Data yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Uang jajan	Uang yang ditabung
Rp10.000,00	Rp2.000,00
Rp40.000,00	Rp11.000,00
Rp25.000,00	Rp8.000,00
Rp50.000,00	Rp14.000,00
Rp15.000,00	Rp5.000,00
Rp35.000,00	Rp10.000,00
Rp30.000,00	Rp7.000,00
Rp45.000,00	Rp15.000,00

1. Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
2. Gambarlah prediksi garis *best-fit* dari hubungan antara uang jajan dan uang yang ditabung.
3. Jelaskan alasan mengapa kamu menggambar garis lurus seperti itu.
4. Berapa prediksi uang yang ditabung jika uang jajan seorang siswa adalah Rp20.000,00 jika berdasarkan garis *best-fit* yang digambar?
5. Berapa prediksi uang yang ditabung jika uang jajan seorang siswa adalah Rp60.000,00 jika berdasarkan garis *best-fit* yang digambar?
6. Bandingkan prediksi garis *best-fit* yang telah kamu buat dengan prediksi garis *best-fit* yang digambar oleh teman-temanmu serta bandingkan dengan alasanmu, dan tulislah kesimpulan dari berbagai ide atau gagasan yang menurut kamu paling tepat untuk menggambar suatu garis *best-fit*.

Semua proses di atas disebut sebagai regresi. **Regresi** adalah metode statistika untuk memprediksi hubungan antara variabel dependen dan variabel independen yang bertujuan untuk memprediksi nilai variabel dependen jika nilai variabel independennya berubah.

Berdasarkan **Eksplorasi 1.13**, pasti banyak ide dan gagasan yang berbeda-beda mengenai cara menggambar garis lurus yang tepat. Di antara semua garis yang mungkin dibentuk, hanya ada satu garis yang paling tepat yang disebut sebagai garis *best-fit*. Garis *best-fit* ini merupakan model linear terbaik yang memperkirakan hubungan antara dua variabel numerikal pada suatu diagram pencar. Model regresi yang memperkirakan hubungan garis lurus antara dua variabel ini disebut **regresi linear**.



Gambar 1.6 Model Linear Terbaik (*Best-fit*)

Gambar 1.6 memberikan contoh bagaimana suatu garis *best-fit* digambar di antara titik-titik pada diagram pencar. Garis ini tidak harus melalui titik-titik tersebut karena hanya bersifat estimasi. Namun, bisa saja garis melewati satu titik atau lebih pada saat penggambaran. Tapi satu hal yang pasti adalah garis tersebut selalu melalui pasangan titik koordinat rata-rata nilai x dan y , $(\bar{x}, \bar{y})$.

Pada **Eksplorasi 1.13** No. 4, kamu telah melakukan suatu proses yang disebut interpolasi. **Interpolasi** adalah penggunaan hubungan antarvariabel untuk memprediksi nilai yang berada di dalam jangkauan data. Dalam kasus **Eksplorasi 1.13**, jangkauan data uang jajan hanya antara Rp10.000,00 hingga

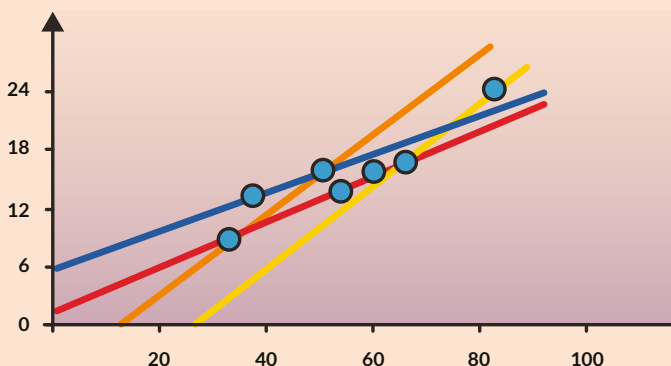
Rp50.000,00 sehingga kamu bisa memprediksi uang yang ditabung hanya dalam jangkauan data tersebut.

Jika kamu memprediksi uang yang ditabung dengan menggunakan informasi uang jajan kurang dari Rp10.000,00 dan lebih dari Rp50.000,00 seperti pada **Eksplorasi 1.13** No. 5, kamu telah melakukan suatu proses yang disebut ekstrapolasi. **Ekstrapolasi** adalah penggunaan hubungan antarvariabel untuk memprediksi nilai yang berada di luar jangkauan data dengan asumsi bahwa hubungan ini berlaku meskipun di luar jangkauan data. Tentunya, hasil interpolasi lebih dapat dipercaya dibandingkan dengan ekstrapolasi.



Ayo, Berkomunikasi

Perhatikan dan pikirkanlah garis mana yang paling tepat untuk mewakili data pada diagram pencar di bawah ini berdasarkan hal yang telah kamu pelajari. Jika menurutmu tidak ada garis yang tepat, buatlah garis baru. Jelaskan alasan yang mendasari pilihanmu.



Apakah ada cara pasti menentukan garis *best-fit*? Untuk menentukan secara pasti persamaan garis *best-fit*, kamu perlu menghitung nilai gradien (b) dan konstanta (a) persamaan garis lurus sehingga kamu akan mendapatkan persamaan garis dalam bentuk $\hat{y} = a + bx$. Kamu dapat mempelajari mengenai cara menghitung nilai-nilai tersebut dan menginterpretasikan arti nilai-nilai tersebut pada bagian pengayaan. Hal yang paling penting saat ini adalah kamu bisa membuat prediksi garis *best-fit* secara intuitif dan menerapkannya untuk analisis data.

Pada beberapa kasus, garis *best-fit* susah untuk diprediksi akibat dari arah dan tren data yang tidak begitu jelas. Lakukan **Eksplorasi 1.14** untuk melihat salah satu contoh kondisi yang mungkin terjadi.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 1.14

Suatu penelitian bertujuan untuk mencari korelasi antara kandungan gula (gram) dan jumlah kalori dalam satu sajian dari 7 sampel suatu merek sereal.

Gula (gram)	2	3	4	6	7	8	12
Kalori	90	110	120	110	130	120	150

1. Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
2. Gambarlah sebuah prediksi garis *best-fit* yang mewakili data pada diagram pencar bagian a).
3. Berdasarkan prediksi garis *best-fit* pada bagian b), berapa prediksi kalori jika jumlah gula adalah 11 gram?

Peneliti menambahkan 3 sampel merek sereal terbaru sehingga menambahkan data dari penelitian sebelumnya.

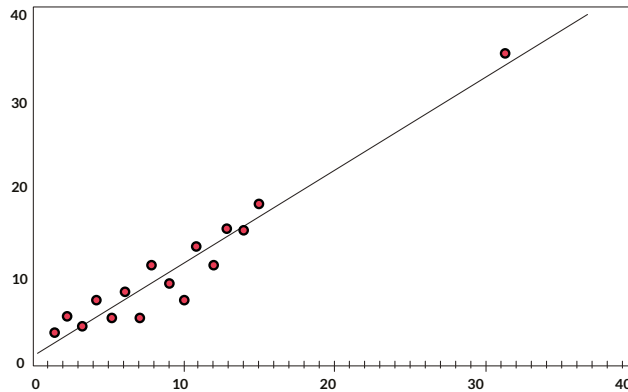
Gula (gram)	2	3	4	6	7	8	12	5	10	25
Kalori	90	110	120	110	130	120	150	110	130	280

4. Gambarlah diagram pencar baru dari data di atas.
5. Gambarlah sebuah prediksi garis *best-fit* yang mewakili data pada diagram pencar bagian d).
6. Berdasarkan prediksi garis *best-fit* pada bagian e), berapa prediksi kalori jika jumlah gula adalah 11 gram?
7. Bandingkan dan jelaskan pengaruh penambahan data terhadap garis *best-fit* dan prediksi nilai kalori yang diperoleh saat jumlah gula adalah 11 gram.

Pada saat kamu berusaha untuk menggambar suatu garis *best-fit* yang mewakili data bivariat, terkadang akan terlihat ada data yang sangat tidak cocok dengan pola umumnya. Biasanya data ini adalah data pencilan. Kamu mungkin akan terpancing untuk menghilangkan data tersebut agar garis *best-fit* yang dibuat menjadi lebih tepat mewakili semua data.

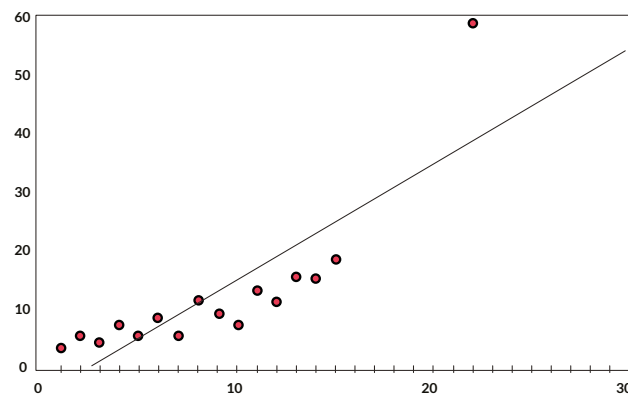
Ada beberapa hal berikut ini yang harus diperhatikan untuk menggambar garis *best-fit* saat ada data pencilan:

1. Data pencilan yang tidak mengakibatkan perubahan garis lurus maka data tersebut dapat digunakan ataupun tidak digunakan.



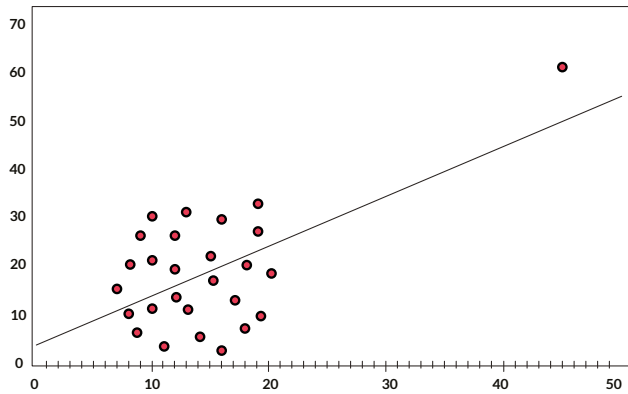
Gambar 1.7 Data Pencilan Tidak Mengubah Garis *Best-fit*

2. Data pencilan yang mengakibatkan perubahan garis lurus maka data tersebut tetap digunakan.



Gambar 1.8 Data Pencilan Mengubah Garis *Best-fit*

3. Data pencilan yang mengakibatkan munculnya korelasi padahal tidak mempunyai korelasi maka data tersebut tidak digunakan.

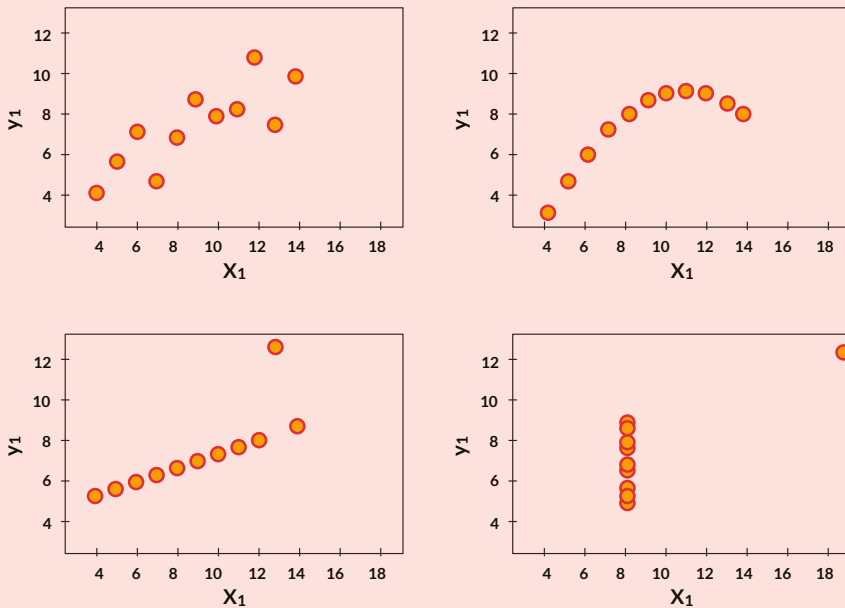


Gambar 1.9 Data Pencilan Memunculkan Korelasi



Ayo, Berpikir Kritis

Gambarlah model linear terbaik sebagai model dari suatu data bivariat yang mempunyai diagram pencar berikut ini.



Gambar 1.10 Anscombe's Quartet

Latihan 1.6

- Seorang akuntan mencatat jumlah produksi barang per bulan dari sebuah perusahaan dengan biaya produksinya.

Jumlah barang (ribuan unit)	21	39	48	24	72	75	15	35	62	81	12	56
Biaya produksi (jutaan rupiah)	40	58	67	45	89	96	37	53	83	102	35	75

- Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
 - Gambarlah sebuah prediksi garis *best-fit* yang mewakili data pada diagram pencar bagian a).
 - Berdasarkan prediksi garis *best-fit*, berapa prediksi biaya produksi jika jumlah barang yang diproduksi adalah 65.000 unit?
- Tabel di bawah ini menunjukkan umur dari beberapa ayam dan jumlah telur yang dihasilkan dalam sebulan.

Umur ayam (bulan)	18	32	44	60	71	79	99	109	118	140
Jumlah telur (butir)	16	18	13	7	12	7	11	13	6	4

- Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
 - Gambarlah sebuah prediksi garis *best-fit* yang mewakili data pada diagram pencar bagian a).
 - Berdasarkan prediksi garis *best-fit*, berapa prediksi jumlah telur jika umur ayam adalah 67 bulan?
- Suatu penelitian dilakukan pada suatu laboratorium untuk mencari tahu hubungan antara lapisan cat yang diberikan pada suatu perahu dengan ketahanan perahu tersebut dari kondisi cuaca.

Jumlah lapisan cat	1	2	3	4	5
Ketahanan (tahun)	1,4	2,9	4,1	5,8	7,2

- Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
- Gambarlah sebuah prediksi garis *best-fit* yang mewakili data pada diagram pencar bagian a).
- Berdasarkan prediksi garis *best-fit*, berapa prediksi ketahanan perahu jika jumlah lapisan cat adalah 7 lapis?

Di dalam upaya untuk meningkatkan reliabilitas penelitian, dua observasi tambahan dilakukan dan digabungkan ke data sebelumnya.

Jumlah lapisan cat	6	8
Ketahanan (tahun)	8,2	9,9

- Gunakan gabungan semua data untuk menggambar diagram pencar baru.
- Gambarlah sebuah prediksi garis *best-fit* yang mewakili data pada diagram pencar bagian d).
- Berdasarkan prediksi garis *best-fit* terbaru, berapa prediksi ketahanan perahu jika jumlah lapisan cat adalah 7 lapis?
- Berikan alasan mengenai prediksi terbaru ini mungkin akan lebih tepat dibandingkan dengan prediksi pada bagian c)?



Ayo, Berpikir Kritis

- Jika kamu diminta untuk memprediksi ketahanan perahu jika jumlah lapisan cat adalah 9 lapis, prediksi garis *best-fit* mana yang akan kamu gunakan? Jelaskan alasanmu.
- Jika ada data baru lagi yang ditambahkan yaitu 15 lapisan cat dan didapatkan bahwa bertahan selama 11 tahun, buatlah prediksi garis *best-fit* yang baru.



Ayo, Berefleksi

Mari kita merefleksikan kembali hal-hal apa saja yang telah kamu pelajari.

- Apakah saya sudah bisa menggambar diagram pencar?
- Apakah saya sudah bisa menentukan arah, bentuk, dan interpretasi tren data dengan membaca diagram pencar?
- Apakah saya sudah bisa memperkirakan model linear terbaik (*best-fit*)?

4. Apakah saya sudah bisa mengidentifikasi dan menjelaskan hubungan antara dua variabel numerikal?
5. Apakah saya sudah bisa membedakan hubungan asosiasi dan sebab-akibat?

Uji Kompetensi

1. Kelompokkan data berikut ini menurut jenis datanya, data kategorikal atau numerikal.
 - rasa
 - merek buku
 - tinggi rumah
 - sayuran
 - diameter bola
 - alat tulis
 - lebar jalan
 - jarak rumah ke sekolah
 - volume bahan bakar
 - cuaca
2. Buatlah daftar kategori atau pengelompokan untuk mengubah data numerikal berikut menjadi data kategorikal.
 - a. Suhu
 - b. Nilai ujian
 - c. Panjang rambut
3. Pada suatu penelitian mengenai tubuh manusia, peneliti mengukur ukuran beberapa bagian tubuh dari sebanyak 20 laki-laki dan perempuan. Setiap orang diukur ukuran dada, pinggang, dan pinggul. Berikut ini adalah hasil pengukurannya.

Jenis Kelamin	Lingkar Dada	Lingkar Pinggang	Lingkar Pinggul
Laki-laki	86	76	81
Laki-laki	94	81	94
Laki-laki	97	76	91
Laki-laki	91	84	99
Laki-laki	97	74	84
Laki-laki	109	81	97
Laki-laki	102	84	107
Laki-laki	97	76	102
Laki-laki	102	76	94
Laki-laki	104	81	99

Jenis Kelamin	Lingkar Dada	Lingkar Pinggang	Lingkar Pinggul
Perempuan	91	61	89
Perempuan	91	64	94
Perempuan	86	61	94
Perempuan	84	56	86
Perempuan	91	66	94
Perempuan	94	66	94
Perempuan	86	64	97
Perempuan	91	66	94
Perempuan	97	71	102
Perempuan	89	58	89

Tulislah dua pasangan dua variabel yang hubungannya terlihat dengan jelas dan jelaskan hubungan seperti apa yang dapat diperoleh dari dua variabel tersebut.

4. Suatu penelitian ingin menemukan hubungan antara tinggi badan dan berat badan. Penelitian dilakukan di kota-kota yang ada di Provinsi Banten yaitu Cilegon, Serang, Tangerang, dan Tangerang Selatan. Berikut ini adalah hasil survei yang diperoleh.

Hasil Survei Kota Cilegon

Berat Badan	Tinggi Badan		
	Tinggi	Sedang	Pendek
Obesitas	15	30	11
Normal	20	42	18
Kurang	10	23	8

Hasil Survei Kota Serang

Berat Badan	Tinggi Badan		
	Tinggi	Sedang	Pendek
Obesitas	10	23	7
Normal	16	50	21
Kurang	17	27	13

Hasil Survei Kota Tangerang

Berat Badan	Tinggi Badan		
	Tinggi	Sedang	Pendek
Obesitas	18	28	14
Normal	22	53	31
Kurang	14	19	8

Hasil Survei Kota Tangerang Selatan

Berat Badan	Tinggi Badan		
	Tinggi	Sedang	Pendek
Obesitas	24	44	26
Normal	31	57	22
Kurang	17	30	14

- a. Buatlah tabel tunggal yang berisi gabungan semua data tabel di atas.
 - b. Ubahlah masing-masing tabel di atas menjadi bentuk matriks, termasuk tabel tunggal yang diperoleh pada bagian a).
5. Tabel berikut ini menunjukkan atlet yang melakukan perenggangan badan sebelum latihan dan atlet yang mengalami cedera pada tahun lalu.

Atlet	Perenggangan	Cedera
Atlet 1	Ya	Ya
Atlet 2	Ya	Tidak
Atlet 3	Tidak	Ya
Atlet 4	Ya	Tidak
Atlet 5	Ya	Tidak
Atlet 6	Tidak	Ya
Atlet 7	Ya	Tidak
Atlet 8	Ya	Ya
Atlet 9	Tidak	Ya
Atlet 10	Tidak	Ya
Atlet 11	Ya	Tidak
Atlet 12	Tidak	Ya
Atlet 13	Ya	Tidak
Atlet 14	Tidak	Tidak
Atlet 15	Ya	Tidak
Atlet 16	Tidak	Ya
Atlet 17	Tidak	Tidak
Atlet 18	Ya	Tidak
Atlet 19	Tidak	Ya
Atlet 20	Ya	Tidak

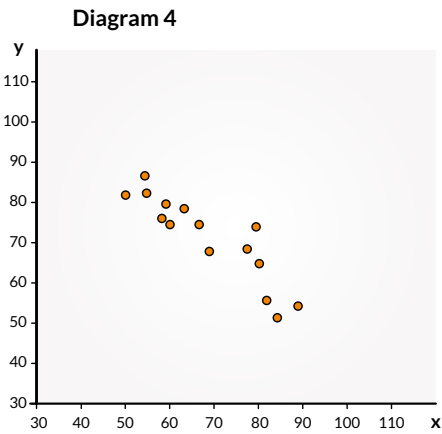
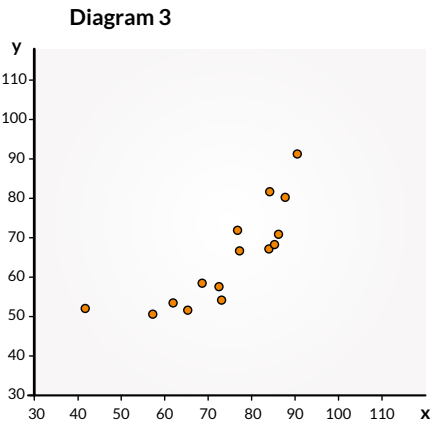
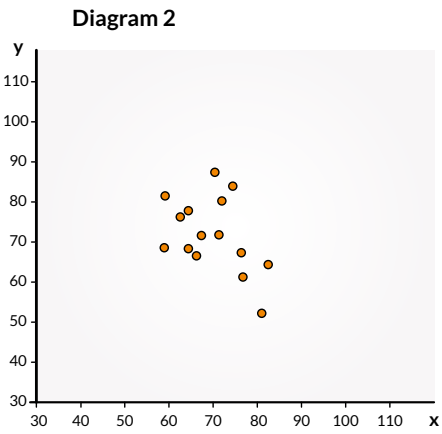
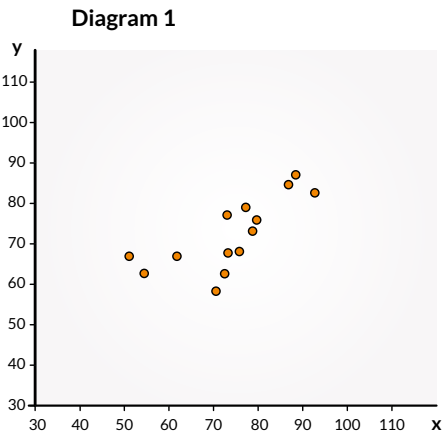
Atlet	Perenggangan	Cedera
Atlet 21	Tidak	Ya
Atlet 22	Ya	Tidak
Atlet 23	Tidak	Ya
Atlet 24	Ya	Ya
Atlet 25	Ya	Tidak
Atlet 26	Tidak	Ya
Atlet 27	Ya	Tidak
Atlet 28	Ya	Tidak
Atlet 29	Ya	Tidak
Atlet 30	Tidak	Tidak
Atlet 31	Ya	Ya
Atlet 32	Tidak	Ya
Atlet 33	Ya	Ya
Atlet 34	Tidak	Tidak
Atlet 35	Ya	Tidak
Atlet 36	Tidak	Tidak
Atlet 37	Ya	Ya
Atlet 38	Ya	Tidak
Atlet 39	Tidak	Ya
Atlet 40	Ya	Tidak

- a. Buatlah tabulasi silang dari data tabel di atas.
- b. Apakah ada asosiasi antara perenggangan badan dan cedera? Jelaskan asosiasi tersebut.

6. Tabel berikut ini merupakan sampel para musisi dan proses belajar memainkan alat musik.

Jenis Kelamin	Cara Belajar Alat Musik		
	Mandiri	Sekolah	Les
Laki-laki	12	40	20
Perempuan	20	20	18

- Jelaskan apakah secara keseluruhan bisa dikatakan bahwa mayoritas musisi memerlukan guru untuk belajar memainkan alat musik?
 - Manakah yang lebih banyak belajar di les, laki-laki atau perempuan?
 - Apakah ada asosiasi antara jenis kelamin dan cara belajar alat musik? Jelaskan asosiasi tersebut.
7. Perhatikan setiap diagram pencar di bawah ini.

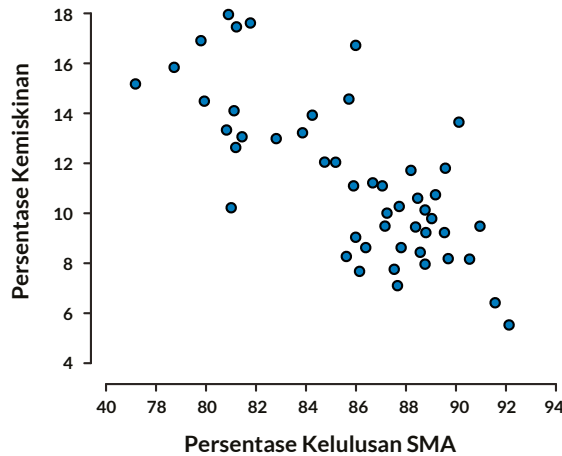


Untuk masing-masing diagram di atas, tentukan:

- a. Apakah ada hubungan antara variabel x dan y ?
 - b. Jika iya, apakah hubungannya linear atau kurva/nonlinear?
 - c. Apakah hubungannya positif atau negatif?
8. Untuk setiap pasangan variabel berikut ini, berikan pendapatmu apakah mereka mempunyai korelasi positif, korelasi negatif, atau tidak berkorelasi.
- a. Bunga dan banyak pinjaman bank
 - b. Tinggi badan dan IQ
 - c. Tinggi badan dan ukuran sepatu
 - d. Banyak pohon dan tingkat polusi
9. Sebuah perusahaan manufaktur mobil ingin menyelidiki bagaimana harga salah satu model mobilnya terdepresiasi (penurunan) seiring bertambahnya usia mobil. Departemen riset di perusahaan mengambil sampel delapan mobil model ini dan mengumpulkan informasi berikut tentang usia (dalam tahun) dan harga (dalam jutaan rupiah) mobil-mobil ini.

Usia (tahun)	8	3	6	9	2	5	6	3
Harga (jutaan rupiah)	45	210	100	30	260	135	120	235

- a. Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
 - b. Gambarlah sebuah prediksi garis *best-fit* yang mewakili data pada diagram pencar bagian a).
 - c. Berdasarkan prediksi garis *best-fit*, berapa prediksi harga mobil jika suatu mobil berusia 7 tahun?
 - d. Berdasarkan prediksi garis *best-fit*, berapa prediksi harga mobil jika suatu mobil berusia 10 tahun?
 - e. Jelaskan mengapa prediksi harga pada bagian d) tidak dapat digunakan?
10. Rizki ingin mengetahui hubungan tingkat kelulusan SMA dan tingkat kemiskinan. Data yang diperoleh tersebut disajikan oleh Rizki dalam bentuk diagram pencar berikut.



- Gambarlah sebuah prediksi garis *best-fit* untuk diagram pencar di atas.
 - Apakah dengan adanya hubungan linear menyiratkan bahwa suatu negara yang menaikkan tingkat persentase kelulusannya akan menyebabkan tingkat persentase kemiskinannya turun? Jelaskan alasanmu.
11. Berikut ini adalah data mengenai banyak karyawan pada suatu taman bermain dengan luas taman bermain tersebut.

Banyak karyawan (y)	Luas taman bermain (x) dalam ribuan m ²
20	1,2
35	3,3
42	6,3
58	8,2
50	8,6
60	14,3
68	14,5
76	16,1
90	17,3
110	21
105	23,6
110	24
162	31,6
85	38

- Gambarlah diagram pencar dari data di atas dan gambarlah prediksi model linear terbaik (*best-fit*).
- Buatlah diagram pencar baru tanpa data di baris terakhir dan gambarlah prediksi model linear terbaik yang baru.
- Jelaskan gambar prediksi model linear terbaik mana yang lebih menggambarkan kondisi data tersebut.

Pengayaan

Regresi Linear

Di dalam proses analisis regresi linear, kamu akan mempelajari cara mencari garis regresi yang paling tepat terhadap titik-titik yang ada pada diagram pencar. Garis regresi itu akan memberikan deskripsi terbaik mengenai hubungan antara variabel independen dan dependen. Sama halnya untuk mendapatkan persamaan garis lurus pada umumnya, persamaan garis regresi sering dituliskan dalam bentuk umum berikut ini.

$$\hat{y} = a + bx$$

Bentuk persamaan di atas dibaca sebagai **regresi y atas x**, dengan:

$\hat{y}$ adalah nilai variabel dependen yang diprediksi

x adalah nilai variabel independen

a adalah titik potong sumbu-y

b adalah gradien garis regresi.

Maka dari itu, hal yang perlu dicari adalah nilai a dan b , dan kemudian nilai-nilai tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan garis regresi di atas.

Nilai b dapat dihitung menggunakan konsep jumlah kuadrat variabel-variabelnya. Ada dua jenis jumlah kuadrat variabel yang akan digunakan dan disingkat menjadi SS yang merupakan singkatan dari “*sum of squares*” yang berarti jumlah kuadrat, yaitu:

- Jumlah kuadrat selisih variabel independen $\bar{x}$ terhadap rata-ratanya dan variabel dependen y terhadap rata-ratanya.

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \text{ atau } SS_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}$$

2. Jumlah kuadrat selisih variabel independen $\bar{x}$ terhadap rata-ratanya.

$$SS_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ atau } SS_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}$$

Ingat, jika nilai SS_{xy} dan SS_{xx} berdiri sendiri masing-masing maka mereka tidak memiliki makna apa-apa. Mereka hanyalah perhitungan sementara yang digunakan untuk proses perhitungan berikutnya.

Nilai b dapat dihitung dengan menggunakan kedua jenis jumlah kuadrat di atas sehingga menjadi:

$$b = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$$

Tahap berikutnya kamu perlu mencari nilai a . Untuk mencari ini, kamu perlu mengetahui bahwa salah satu karakteristik garis regresi adalah garis regresi selalu melalui titik rata-ratanya $(\bar{x}, \bar{y})$.

Oleh karena garis regresi linearnya adalah $\hat{y} = a + bx$ dan titik $(\bar{x}, \bar{y})$ dilalui garis tersebut maka dapat disubstitusikan sehingga menjadi:

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \dots \text{substitusi } (\bar{x}, \bar{y})$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Sesuai dengan persamaan di atas, jadi untuk mencari nilai a kamu perlu mencari nilai $\bar{x}$, nilai $\bar{y}$ dan nilai b terlebih dahulu.

Setelah memperoleh nilai a dan b , substitusikan nilai-nilai tersebut ke dalam persamaan $\hat{y} = a + bx$. Maka akhirnya kamu akan mendapatkan persamaan garis regresinya.

Ayo gunakan tahapan dan rumus di atas untuk menyelesaikan permasalahan pada eksplorasi berikut ini serta menggunakan garis regresi yang diperoleh untuk interpretasi dan analisis lanjutan.

**Eksplorasi 1.15**

Tabel berikut ini berisi informasi dari 12 siswa SMA mengenai rata-rata waktu yang digunakan per hari dalam menggunakan media sosial dan internet untuk bersosialisasi dan hiburan, dan nilai mereka.

Waktu (jam per hari)	4,4	6,2	4,2	1,6	4,7	5,4	1,3	2,1	6,1	3,3	4,4	3,5
Nilai	81	55	78	92	68	55	90	82	67	72	68	84

1. Gambarkanlah diagram pencar dari data di atas.
2. Apakah diagram pencarnya memberikan indikasi bahwa ada hubungan linear antara rata-rata waktu untuk media sosial dan internet dengan nilai?
3. Tentukan persamaan garis regresinya. Ikutilah tahapan berikut ini.
 - a. Hitunglah nilai $\bar{x}$ dan $\bar{y}$
 - b. Hitunglah nilai SS_{xy} dan SS_{xx}
 - c. Hitunglah nilai b , gradien garis regresi, menggunakan hasil dari a) dan b).
 - d. Hitunglah nilai a , titik potong sumbu-y, menggunakan hasil dari a) dan c).
 - e. Tentukan persamaan garis regresinya dengan menggunakan hasil dari c) dan d).
4. Interpretasikan masing-masing arti nilai a dan b yang ditemukan pada No. 3.
5. Hitunglah prediksi nilai siswa yang menggunakan rata-rata waktu 3,8 jam per hari untuk media sosial dan internet menggunakan persamaan garis regresi yang ditemukan pada No. 3.
6. Hitunglah prediksi nilai siswa yang menggunakan rata-rata waktu 16 jam per hari untuk media sosial dan internet menggunakan persamaan garis regresi yang ditemukan pada No.3. Berikan komentar mengenai hasil yang ditemukan.

Pada **Eksplorasi 1.15** No. 5, kamu telah melakukan interpolasi dengan persamaan garis regresi yang ditemukan tanpa perlu membaca titik koordinat

garis regresi, sedangkan pada No. 6 kamu telah melakukan ekstrapolasi dengan persamaan garis regresi.

Latihan 1.7

1. Pada saat kondisi mendadak, para pengendara mobil memerlukan waktu yang berbeda-beda untuk dapat beraksi untuk menginjak rem mobil. Jarak yang diperlukan hingga terjadi reaksi menginjak rem disebut sebagai jarak reaksi. Tabel berikut ini memberikan informasi mengenai jarak reaksi dari mobil yang melaju dengan kecepatan yang berbeda-beda.

Kecepatan (km/jam)	Jarak Reaksi (m)
20	4,1
30	6,2
40	8,3
50	10,1
60	12,4
70	14,5

- a. Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
- b. Apakah diagram pencarnya memberikan indikasi bahwa ada hubungan linear antara kecepatan dengan jarak reaksi?
- c. Tentukan persamaan garis regresinya.
- d. Interpretasikan nilai a dan b yang diperoleh pada bagian c).
- e. Hitunglah prediksi jarak reaksi jika suatu mobil bergerak dengan kecepatan 35 km/jam?
- f. Hitunglah prediksi jarak reaksi jika suatu mobil bergerak dengan kecepatan 55 km/jam?
2. Tabel berikut ini adalah data mengenai rata-rata tinggi badan perempuan yang berumur 2–14 tahun.

Umur (tahun)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Rata-rata tinggi (cm)	89	98	105	112	118	123	131	136	143	151	155	160	161

- Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
- Apakah diagram pencarnya memberikan indikasi bahwa ada hubungan linear antara umur dengan rata-rata tinggi badan?
- Tentukan persamaan garis regresinya.
- Interpretasikan nilai a dan b yang diperoleh pada bagian c).
- Hitunglah prediksi tinggi badan seorang perempuan yang berumur 5,8 tahun.
- Hitunglah prediksi tinggi badan seorang perempuan yang sudah berumur 30 tahun?
- Berikan komentar mengenai nilai perkiraan di bagian f).

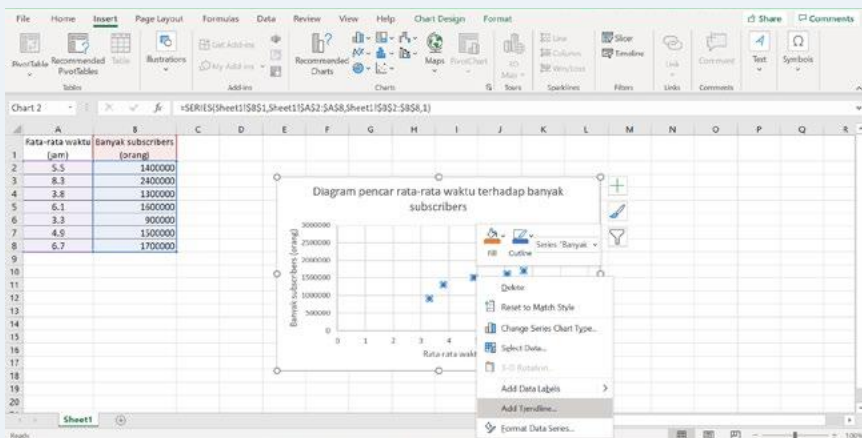


Ayo, Menggunakan Teknologi

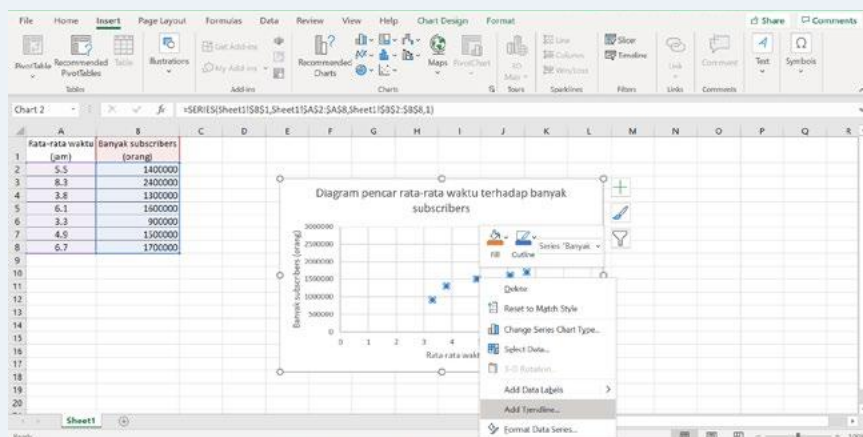
Apakah kamu sudah mahir menggunakan aplikasi Microsoft Excel untuk menggambar diagram pencar? Kamu bisa selalu kembali ke bagian panduan untuk melatih ulang keterampilan menggambar diagram pencar. Ayo, latihan kembali.

Kamu akan menggunakan aplikasi yang sama untuk menggambar garis regresi linear. Kamu juga bisa langsung tahu persamaan garis regresinya tanpa harus dihitung menggunakan rumus yang telah kamu pelajari sebelumnya. Sangat efisien, bukan? Yuk, perhatikan tahapan di bawah ini. Kamu dapat menggunakan data yang sama dengan latihan membuat diagram pencar sebelumnya.

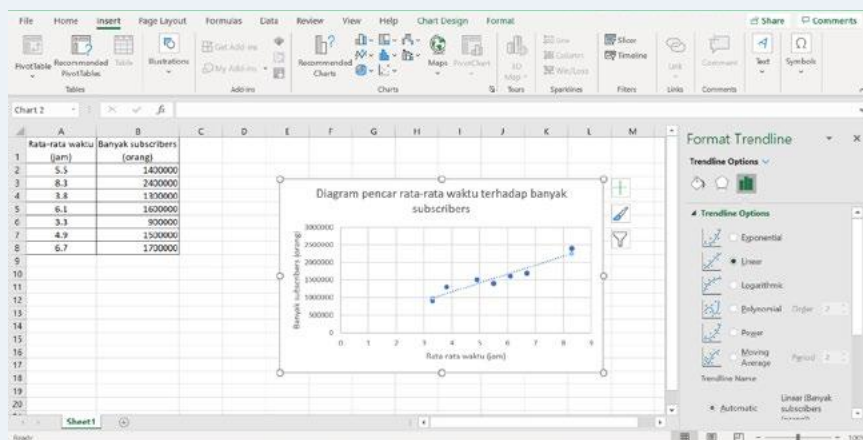
- Klik salah satu titik data pada diagram, kemudian klik kanan dan pilih “Add Trendline”.



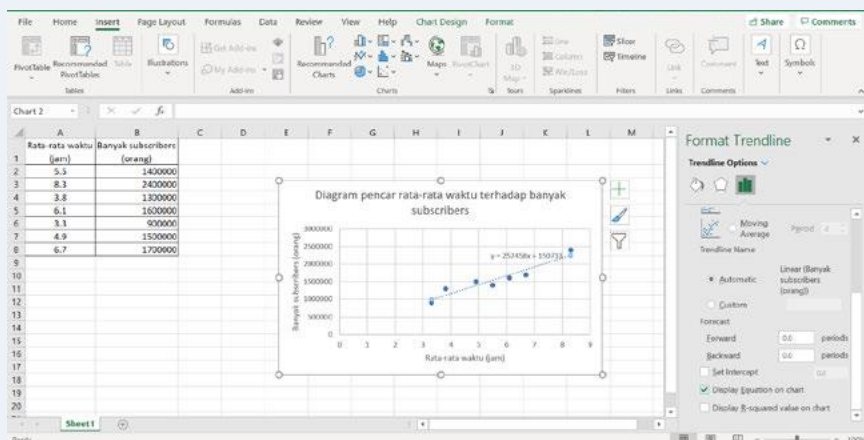
- Klik salah satu titik data pada diagram, kemudian klik kanan dan pilih “Add Trendline”.



- Menampilkan garis regresi linear: Setelah tahapan No. 1, akan ada tampilan menu tambahan di sebelah kanan dan pilihlah “Linear” pada *Trendline Options*.



- Menampilkan persamaan garis regresi linear: pada menu yang sama di sebelah kanan, pada bagian bawahnya ada pilihan untuk menampilkan persamaan garis regresi, pastikan centang “Display Equation on chart” maka kamu dapat melihat bahwa persamaan garis regresi sudah ditampilkan pada diagram.



Mudah, bukan? Jika sudah terbiasa maka tahapan ini hanya akan memerlukan waktu hitungan detik saja untuk menggambar garis regresi dan menemukan persamaan garis regresinya.



Ayo, Berpikir Kritis

Ayo bandingkan persamaan garis yang diberikan oleh Microsoft Excel dengan hasil perhitungan persamaan garis regresi menggunakan rumus.

1. Apakah jawaban kamu sama atau berbeda?
2. Jika jawabannya berbeda, apa penyebab perbedaan tersebut?
3. Interpretasikan nilai koefisien dari variabel x pada garis regresi yang kamu dapatkan dikaitkan dengan rata-rata waktu dan banyak *subscribers*.
4. Berapa banyak *subscribers* dari seorang artis media sosial yang bekerja dengan rata-rata waktu 5 jam per hari?



Ayo, Berefleksi

Jika memang penggunaan teknologi akan mempermudah segala hal baik dalam menggambar diagram pencar, menggambar garis regresi, dan menemukan persamaan garis regresi, mengapa kamu masih harus melakukan semua hal di atas secara manual dengan menggunakan gambar tangan dan menggunakan rumus?



Ayo, Berefleksi

Mari kita merefleksikan kembali hal-hal apa saja yang telah kita pelajari.

1. Apakah saya sudah bisa menentukan persamaan garis regresi?
2. Apakah saya sudah bisa memberikan interpretasi komponen garis regresi, yaitu gradien dan titik potong sumbu-y?
3. Apakah saya sudah bisa melakukan proses interpolasi dan ekstrapolasi?

Koefisien Korelasi

Masih ingatkah kamu mengenai tingkat korelasi? Pada bagian pengayaan ini, kamu akan mempelajari cara untuk menghitung nilai korelasi sehingga kamu dapat tahu secara pasti tingkat korelasi antara dua variabel.

Tingkat korelasi ini akan diperkenalkan dalam bentuk koefisien korelasi. Koefisien korelasi yang akan kamu gunakan adalah **Korelasi Product Moment**. Terkadang nama penemunya juga dimasukkan ke dalam nama korelasi ini sehingga menjadi **Korelasi Pearson Product Moment** atau **Koefisien Korelasi Pearson**. Koefisien korelasi ini merupakan jenis koefisien korelasi yang paling umum digunakan.



Tahukah Kalian?

Karl Pearson (1895–1980) merupakan seseorang yang tertarik terhadap banyak cabang ilmu termasuk matematika, fisika, agama, sejarah, sosial, dan sebagainya. Pearson dilahirkan dan besar di London. Karl Pearson berkarya banyak di ilmu statistika sehingga banyak ahli statistika yang mengaguminya. Tahukah kamu, selain dari kontribusinya dalam menemukan koefisien korelasi Pearson (r), dia juga yang memperkenalkan istilah standar deviasi atau simpangan baku (σ) yang pastinya sudah tidak asing lagi bagimu.



Gambar 1.11 Karl Pearson
Sumber: Wikimedia Commons
(1912)

Tentunya konsep korelasi *product moment* ini tidak jauh dari konsep yang sering digunakan yaitu jumlah kuadrat. Kali ini, kamu akan menggunakan tiga

jenis jumlah kuadrat yang merupakan semua kemungkinan pasangan antara dua variabel suatu data bivariat. Ketiga jenis tersebut yaitu:

1. Jumlah kuadrat selisih antara variabel independen x terhadap rata-ratanya dan variabel dependen y terhadap rata-ratanya.

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \text{ atau } SS_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}$$

2. Jumlah kuadrat selisih variabel independen x terhadap rata-ratanya.

$$SS_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ atau } SS_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}$$

3. Jumlah kuadrat selisih variabel dependen y terhadap rata-ratanya.

$$SS_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \text{ atau } SS_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}$$

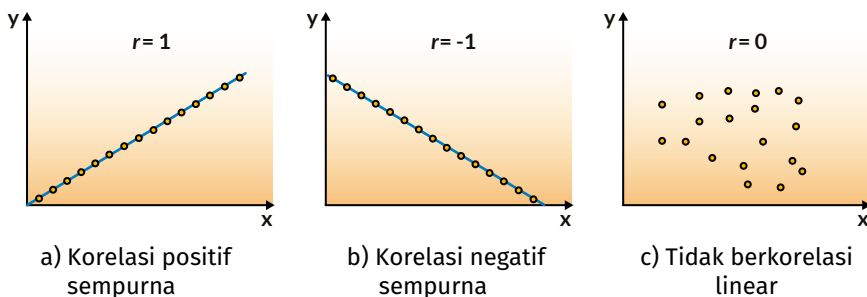
Untuk menghitung nilai Korelasi *Product Moment* (r), substitusikan nilai dari ketiga jenis jumlah kuadrat ke dalam rumus Korelasi *Product Moment* di bawah ini.

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{yy}}}$$

Nilai r yang diperoleh akan selalu berada pada interval $-1 \leq r \leq 1$.

Mari kita lihat bagaimana kamu dapat menginterpretasikan nilai r yang diperoleh dari perhitungan dengan rumus di atas dan hubungannya dengan diagram pencarnya.

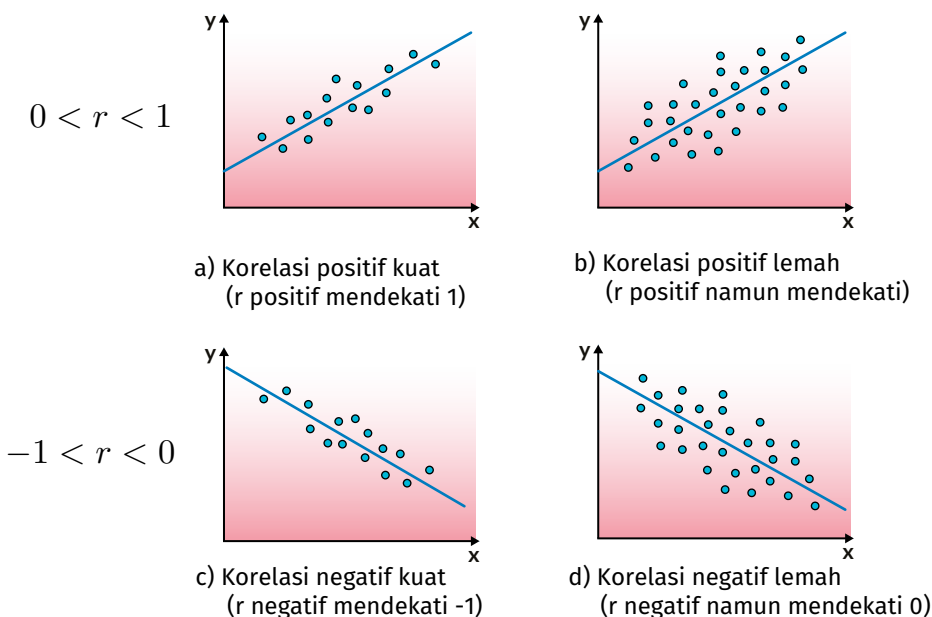
Pada kondisi garis lurus sempurna maka nilai r adalah 1 atau -1 , sedangkan dalam kondisi tidak berkorelasi maka nilai r adalah 0.



Gambar 1.12 Korelasi Sempurna dan Tidak Berkorelasi

Di sisi lain ketika nilai r tidak tepat -1 , 0 , dan 1 , jika nilai mutlak dari r semakin mendekati 0 (semakin kecil) maka semakin lemah atau tidak ada korelasi antara variabel x dan y , sedangkan jika nilai mutlak dari r semakin mendekati 1 (semakin besar) maka semakin kuat korelasi antara variabel x dan y .

Mengapa menggunakan konsep mutlak dari r ? Perlu diingat bahwa nilai $r = -0,97$ memiliki korelasi yang lebih kuat dibanding nilai $r = 0,62$ karena tanda negatif di depan angka hanya menunjukkan arah tren data yang berkorelasi negatif.



Gambar 1.13 Nilai r dan Tingkat Korelasi

Supaya suatu nilai r dapat mendeskripsikan lebih jelas tentang suatu korelasi antar dua variabel maka terkadang nilai koefisien korelasi r sering dibuat dalam interval tertentu dengan deskripsi tingkat hubungan korelasi masing-masing. Perhatikan tabel berikut ini sebagai pedoman menentukan deskripsi tingkat hubungan korelasi.

Tabel 1.4 Hubungan Nilai r dan Tingkat Korelasi

Nilai r	Tingkat Korelasi
0	Tidak ada korelasi
$-0,3 \leq r < 0$ dan $0 < r \leq 0,3$	Lemah
$-0,7 \leq r < -0,3$ dan $0,3 < r \leq -0,7$	Sedang/Cukup
$-1 < r < -0,7$ dan $0,7 < r < 1$	Kuat
-1 dan 1	Sempurna

Rentang nilai r dan deskripsi yang tertera pada tabel di atas merupakan salah satu model saja yang digunakan untuk mendeskripsikan tingkat hubungan korelasi antara dua variabel. Jika kamu mencari di berbagai buku atau sumber lainnya, maka kamu akan memperoleh model yang berbeda lagi karena adanya perbedaan rentang dan derajat tingkat hubungan korelasi.

Ayo gunakan rumus dan interpretasi nilai r di atas untuk menyelesaikan permasalahan di eksplorasi berikut ini.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 1.16

Tabel berikut menunjukkan waktu yang dibutuhkan oleh seorang karyawan yang dipilih secara acak untuk membungkus paket pengiriman barang.

Banyak barang	2	3	3	4	5	5	6	7	8	8	8	9	11	13
Waktu (menit)	11	14	16	16	19	21	23	25	24	27	28	30	35	42

1. Gambarlah diagram pencar dari data di atas.
2. Apakah diagram pencarnya memberikan indikasi bahwa ada hubungan linear antara banyak barang dan waktu?
3. Hitunglah nilai SS_{xx} , SS_{yy} dan SS_{xy} .
4. Hitunglah nilai r .
5. Tentukan tingkat korelasi berdasarkan nilai r pada bagian d).

Setelah melakukan **Eksplorasi 1.16**, kamu pasti sudah mendapatkan gambaran bagaimana hubungan antara suatu kejadian, data yang diperoleh, sketsa diagram pencar, arah dan tren data, nilai r dan interpretasinya.



Ayo, Berpikir Kreatif

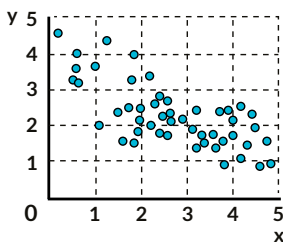
Berikan kasus dalam kehidupan nyata yang melibatkan hubungan dua variabel dalam kondisi berikut ini.

1. r bernilai positif dengan hubungan kuat
2. r bernilai positif dengan hubungan sedang/cukup
3. r bernilai negatif dengan hubungan kuat
4. r bernilai negatif dengan hubungan lemah

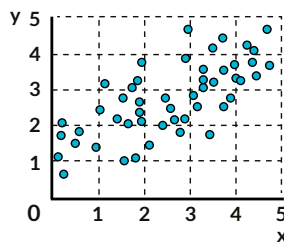
Latihan 1.8

1. Pasangkan kelima diagram pencar berikut ini dengan nilai korelasinya, dengan pilihan $-0,95$, $-0,5$, 0 , $0,5$ dan $0,95$.

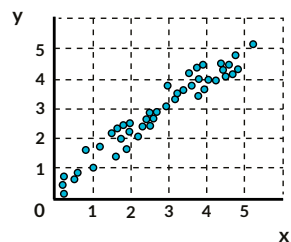
a.



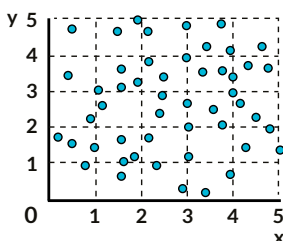
b.



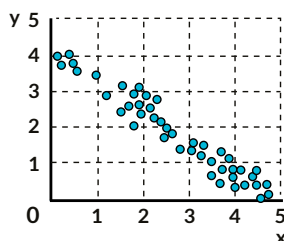
c.



d.



e.



2. Berikut ini adalah 8 kumpulan data buatan. Tentukan nilai r untuk setiap kumpulan data, jika memungkinkan tanpa perlu menghitung. Gambarlah sketsa diagram pencarnya untuk membantu penentuan nilai r ini.

a.

x	y
-1	-1
0	0
1	1

b.

x	y
-1	-1
0	1
1	0

c.

x	y
-1	0
1	0
1	-1

d.

x	y
-1	1
0	0
1	-1

e.

x	y
99	9
100	10
101	11

f.

x	y
15	30
20	40
25	20

g.

x	y
1003	80
1005	82
1009	81

h.

x	y
9,9	1000
10	2000
10,1	0

3. Tabel berikut ini merupakan daftar nilai ujian tengah semester dan nilai ujian akhir semester pelajaran Matematika dari 7 siswa di kelas 11.

Nilai ujian tengah semester	79	95	81	66	87	94	59
Nilai ujian akhir semester	85	97	78	76	94	84	67

- Apakah nilai ujian tengah semester dan nilai ujian akhir semester akan berkorelasi positif atau negatif?
- Gambarlah diagram pencarnya.
- Dengan melihat pada diagram pencarnya, bagaimana nilai koefisien korelasi yang tepat menurutmu, apakah mendekati 0, 1 atau -1?
- Hitunglah nilai r . Apakah nilai r yang diperoleh sesuai dengan prediksi kamu pada bagian a) dan c)?

4. Seorang pemilik toko es krim lokal di Bekasi ingin menentukan apakah suhu udara berpengaruh terhadap bisnisnya. Tabel berikut ini berisi data suhu udara pada pukul 12.00 selama 10 hari berturut-turut tanpa hujan pada musim kemarau dan jumlah pembeli yang dapat membeli es krim di toko tersebut.

Suhu udara (°C)	30	27,2	33,3	32,2	36,1	35,6	31,7	31,7	30,6	28,9
Pembeli (orang)	317	355	463	419	507	482	433	388	362	340

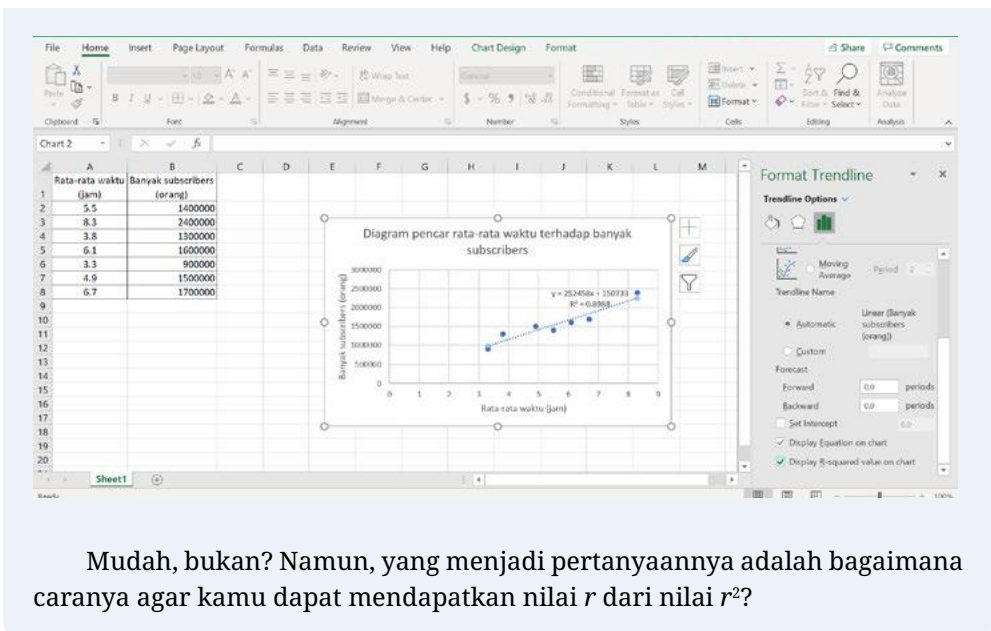
- Dengan suhu udara sebagai variabel independen dan banyak pembeli sebagai variabel dependen, hitunglah nilai dari SS_{xy} , SS_{xx} dan SS_{yy} .
- Gambarlah diagram pencarnya.
- Apakah diagram pencarnya memberikan gambaran hubungan positif atau negatif antara suhu udara dan banyak pembeli?
- Hitunglah nilai koefisien korelasi r .
- Berikan interpretasi nilai r terhadap korelasi antara suhu udara dan banyak pembeli.



Ayo, Menggunakan Teknologi

Apakah kamu sudah mahir menggunakan aplikasi *Microsoft Excel* untuk menggambar diagram pencar, memunculkan garis regresi, dan persamaan garis regresi? Kamu bisa selalu kembali ke bagian panduan untuk melatih ulang keterampilan untuk menggambar diagram pencar, memunculkan garis regresi, dan persamaan garis regresi.

Kali ini kamu juga akan menggunakan aplikasi yang sama untuk menentukan nilai koefisien korelasi (r). *Microsoft Excel* hanya dapat menampilkan nilai r^2 . Pada menu di sebelah kanan sama seperti saat menampilkan garis regresi dan persamaan garis regresi, pada bagian bawahnya ada pilihan untuk menampilkan nilai r^2 , pastikan centang “Display R-squared value on chart” maka kamu dapat melihat bahwa nilai r^2 sudah ditampilkan pada diagram.



Mudah, bukan? Namun, yang menjadi pertanyaannya adalah bagaimana caranya agar kamu dapat mendapatkan nilai r dari nilai r^2 ?

Tahukah Kalian?

Kalian juga bisa memperoleh nilai r dengan menggunakan sintaks di Microsoft Excel yaitu dengan mengetikkan **=CORREL(array1;array2)** dengan **array1** diisi dengan deretan data variabel pertama dan **array2** diisi dengan deretan data variabel kedua.

Ayo, Berefleksi

Mari kita merefleksikan kembali hal-hal apa saja yang telah kita pelajari.

1. Apakah saya sudah bisa menghitung nilai koefisien korelasi?
2. Apakah saya sudah bisa menginterpretasikan nilai koefisien korelasi?

Tugas Akhir Pengayaan

Pergilah ke supermarket atau minimarket terdekat dan carilah 30 jenis makanan yang tertera “daftar nutrisi” pada bungkusnya. Untuk setiap makanan, periksalah kadar lemak (dalam gram) dan kalori per sajian. Pastikan kamu memilih varietas makanan yang beragam untuk memperoleh variasi nilai antara kedua variabel ini.

1. Buatlah diagram pencar dari data yang terkumpul.
2. Apakah diagram pencar yang telah dibuat memberikan gambaran bahwa data tersebut dapat diwakili dengan suatu garis lurus?
3. Hitunglah koefisien korelasi dari kedua variabel ini. Bagaimana hubungan antara kedua variabel tersebut dari nilai koefisien korelasi yang kamu dapatkan?

Tentukan persamaan garis regresi dari datamu. Jika dapat dibuat suatu garis regresi maka interpretasikan nilai dari gradien dan titik potong sumbu-y garis tersebut. Jika tidak dapat dibuat suatu garis regresi, berikan alasan mengapa persamaan garis regresi ini akan memberikan interpretasi yang salah.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2024

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI (Edisi Revisi)

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-388-329-0

Bab

2

Komposisi Fungsi dan Fungsi Invers

? Jika jenis fungsi dasar itu tidak banyak, bagaimana caranya menghasilkan bermacam-macam fungsi untuk memodelkan fenomena atau data dunia nyata?

Tujuan Pembelajaran

Pada bab ini kamu akan belajar untuk menentukan komposisi fungsi yang melibatkan lebih dari satu fungsi. Kamu juga akan menentukan fungsi invers (fungsi kebalikan) jika diketahui suatu fungsi tertentu. Kamu akan menerapkan pemahamanmu atas kedua hal tersebut untuk memodelkan situasi dunia nyata dengan menggunakan fungsi yang sesuai dalam pemecahan masalah.

Kata Kunci

- fungsi
- operasi fungsi
- komposisi fungsi
- fungsi invers

Peta Konsep



Siap-Siap Belajar

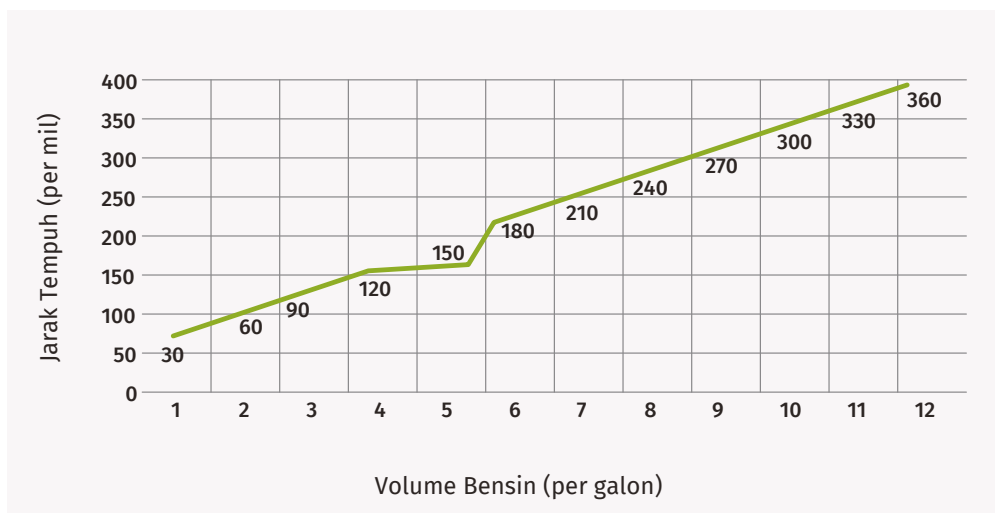
Kamu pasti pernah datang ke Stasiun Pengisian Bahan Bakar Umum (SPBU) dan mengetahui bahwa biaya untuk pembelian bahan bakar kendaraan bergantung pada jenis bahan bakar dan volumenya.



Gambar 2.1 Stasiun Pengisian Bahan Bakar Umum

Hubungan atau relasi antara biaya dengan volume bahan bakar yang dibeli dapat dituliskan sebagai $B = f(V)$ dengan V menyatakan volume bahan bakar yang dibeli dan B merupakan biaya yang dibayar.

Perhatikan grafik di bawah ini yang menunjukkan hubungan antara jarak tempuh sebuah kendaraan dengan penggunaan bahan bakar. Satuan jarak dinyatakan dalam mil, dengan 1 mil = 1,609 km dan satuan volume dinyatakan dalam galon, dengan 1 galon = 3,7854 liter. Hubungan antara keduanya dapat dituliskan sebagai $J = f(V)$ dengan V menyatakan volume bahan bakar yang digunakan dan J merupakan jarak tempuh kendaraan.



Gambar 2.2 Grafik Jarak Tempuh terhadap Volume Bahan Bakar

Dapatkah kamu menyatakan volume bahan bakar yang dapat ditampung oleh tangki kendaraan sebagai suatu himpunan? Dapatkah kamu menyatakan jarak maksimal yang dapat ditempuh untuk setiap volume bahan bakar sebagai suatu himpunan? Konsep seperti ini sudah kamu pelajari dalam materi domain, kodomain, dan *range* dari fungsi.

Dapatkah kamu membuat relasi antara biaya yang diperlukan dengan jarak tempuh sebuah kendaraan berdasarkan biaya sebagai fungsi dari volume bahan bakar dan volume bahan bakar sebagai fungsi dari jarak tempuh? Kamu perlu mempelajari komposisi fungsi untuk menyelesaikan masalah tersebut, yaitu operasi yang dapat diterapkan pada dua atau lebih fungsi.

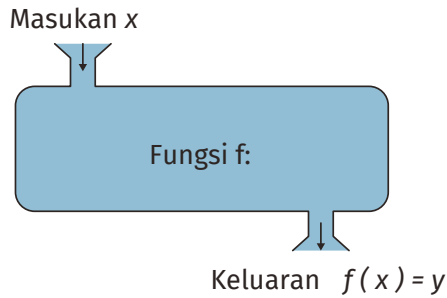
Bagaimana kamu menentukan banyak bahan bakar yang dapat dibeli jika kamu mempunyai sejumlah uang? Bagaimana kamu dapat menentukan jarak tempuh jika kendaraanmu mempunyai volume bahan bakar tertentu? Hubungan timbal balik ini dipelajari dalam fungsi invers.

Bagian pertama dari bab ini akan membahas tentang komposisi fungsi serta operasi-operasi fungsi lain yang sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Kamu juga mempelajari syarat yang harus dipenuhi untuk membuat komposisi dua atau lebih fungsi. Pada bagian kedua dari bab ini kamu akan mempelajari *invers* dari suatu fungsi beserta syarat dan sifat-sifatnya, dan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.



Ayo, Mengingat Kembali

Fungsi merupakan suatu relasi yang menghubungkan satu anggota dari suatu himpunan **tepat ke satu** anggota pada himpunan yang lain. Fungsi biasanya dinyatakan dalam bentuk $f(x) = y$, dengan f merupakan fungsi, x merupakan variabel masukan (*input*) dan y adalah variabel keluaran (*output*). Kamu dapat memahami konsep ini dengan membayangkan **fungsi sebagai mesin** seperti yang diberikan pada gambar berikut:



Gambar 2.3 Analogi Mesin Sebagai Fungsi

Contoh relasi berupa fungsi adalah hubungan antara kategori sebuah kendaraan dengan nilai asuransinya.

Jenis Kendaraan	Nilai Asuransi per Tahun
Kategori 1	4,2 juta
Kategori 2	5,88 juta
Kategori 3	9,6 juta

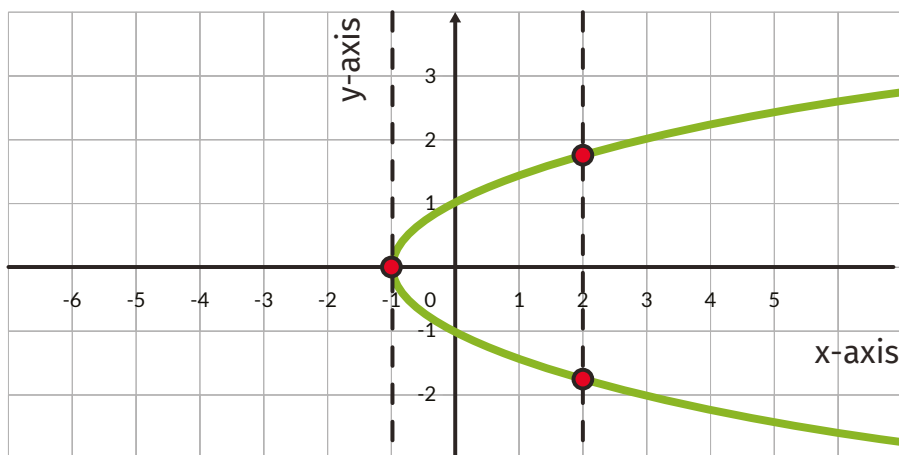
Gambar 2.4 Relasi antara Kategori Kendaraan Bermotor dengan Nilai Asuransi

Pertanyaan:

1. Coba nyatakan relasi pada **Gambar 2.4** dalam bentuk himpunan pasangan berurutan dan diagram panah.
2. Mengapa relasi tersebut merupakan fungsi? Jelaskan jawabanmu.

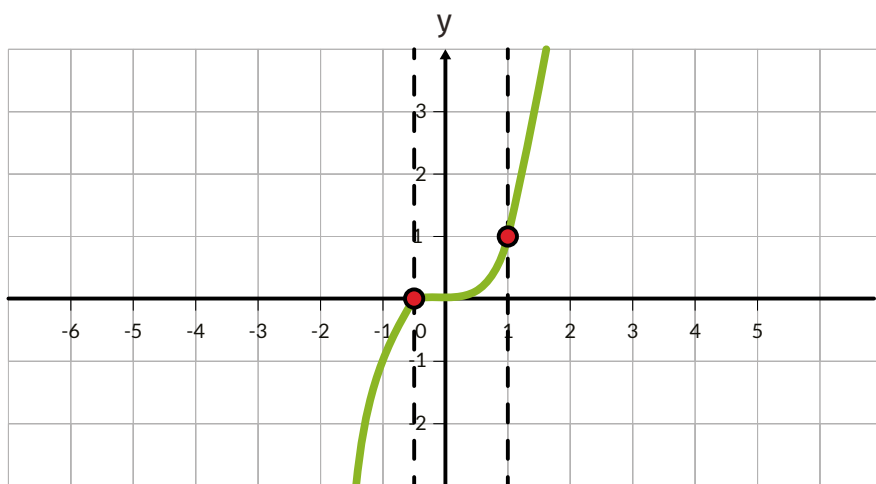
Kamu dapat menentukan apakah relasi dalam grafik merupakan fungsi atau bukan dengan menggunakan **Tes Garis Vertikal**. Caranya yaitu cukup menggeser garis vertikal dari kiri ke kanan (atau sebaliknya) dan melewati grafik tersebut. Apabila garis vertikal tersebut memotong grafik di dua atau lebih titik yang berbeda, maka relasi tersebut bukanlah fungsi.

Gambar 2.5 menampilkan grafik dengan relasi $x = y^2 - 1$. Penggunaan tes garis vertikal menunjukkan bahwa pada $x = 2$ garis vertikal memotong grafik pada dua titik yang berbeda. Relasi ini bukanlah merupakan suatu fungsi.



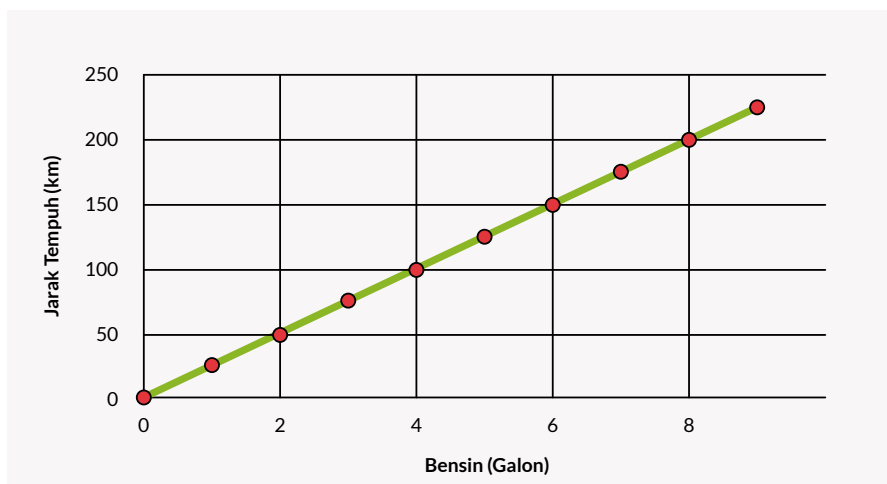
Gambar 2.5 Penggunaan Tes Vertikal pada Grafik $x = y^2 - 1$

Gambar 2.6 menampilkan grafik dengan relasi $y = x^3$. Penggunaan tes garis vertikal menunjukkan bahwa untuk setiap nilai x , garis vertikal memotong grafik tepat pada satu titik. Relasi ini merupakan suatu fungsi.



Gambar 2.6 Penggunaan Tes Garis Vertikal pada Grafik $y = x^3$.

Domain dan *range* dapat juga kamu pahami melalui contoh grafik di bawah ini. Grafik menunjukkan hubungan antara penggunaan bensin dengan jarak tempuh sebuah mobil pada jalan bebas hambatan.

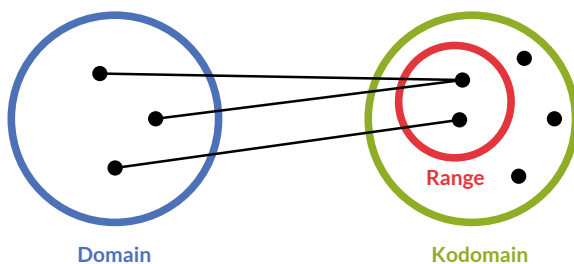


Gambar 2.7 Grafik Jarak Tempuh terhadap Volume Bensin

Jika x adalah volume bensin dalam galon maka volume bensin dapat dituliskan sebagai $0 \leq x \leq 9$. Domain dari volume bensin yang dinyatakan dalam himpunan adalah $\{x \mid 0 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{R}\}$, dengan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan riil. Domain ini dapat juga dituliskan dalam bentuk $[0,9]$.

Jarak tempuh dituliskan sebagai $0 \leq y \leq 225$. Range dari jarak tempuh adalah $\{y \mid 0 \leq y \leq 225, y \in \mathbb{R}\}$, dengan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan bulat positif. Range dapat juga dituliskan dalam bentuk $[0,225]$.

Pengertian domain, kodomain, dan range dapat dilihat secara utuh dalam gambar di bawah ini.

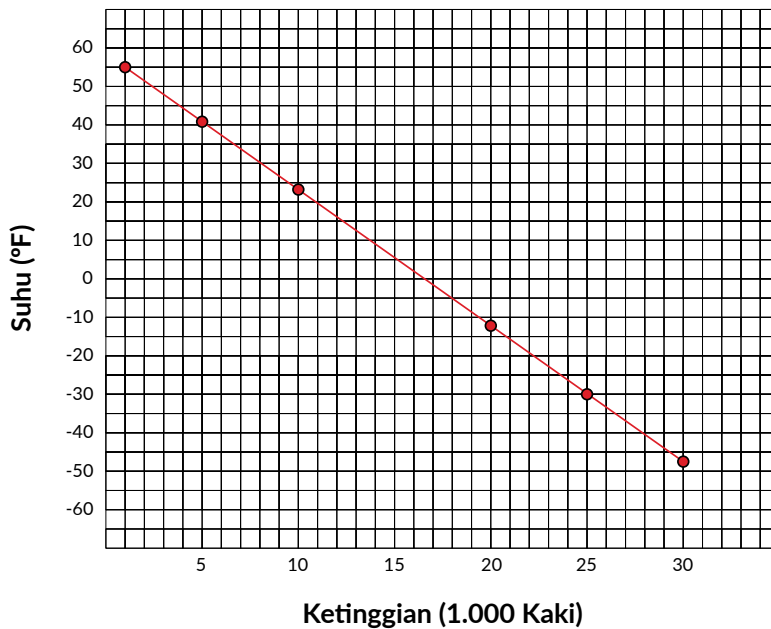


Gambar 2.8 Domain, Kodomain, dan Range

Pertanyaan

Kerjakan soal di bawah ini untuk menguji pemahamanmu terhadap fungsi.

Perhatikan grafik yang menyatakan pengaruh ketinggian dari permukaan laut terhadap suhu atmosfer.



Gambar 2.9 Hubungan antara Suhu dengan Ketinggian di Atas Permukaan Bumi
 Sumber: NASA/grc.nasa.gov

1. Tentukan domain dan *range* dari grafik ini.
2. Selidikilah ketinggian maksimal atmosfer Bumi. Tuliskanlah domain berupa ketinggian dari permukaan laut dan kodomain berupa suhu atmosfer yang bersesuaian dengannya dalam bentuk himpunan.

A. Komposisi Fungsi

1. Operasi Fungsi

Sebelum kamu mempelajari komposisi fungsi, sebaiknya kamu amati dan pahami bagaimana melakukan operasi penjumlahan atau pengurangan lebih dari dua fungsi dan menentukan domain dan *range* dari operasi fungsi tersebut. Kamu juga melakukan operasi perkalian atau pembagian dari dua fungsi dan menentukan domain dan *range* dari operasi fungsi tersebut. Apakah operasi fungsi akan menghasilkan domain dan *range* yang baru dari fungsi yang merupakan hasil operasi fungsi?

a. Penjumlahan dan Pengurangan Fungsi



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 2.1

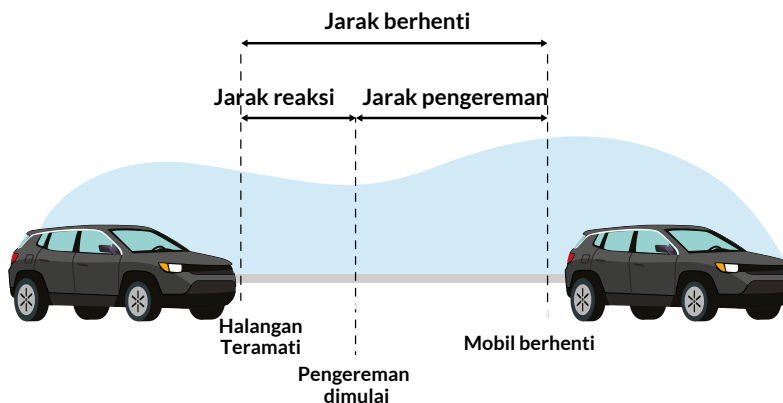
Masalah Pertama

Seorang pemilik kantin sekolah menjual roti dengan harga Rp4.800,00 per buah. Roti tersebut dipesan dengan harga Rp3.900,00 per buah. Biaya pengantaran sebesar Rp22.000,00.

1. Tentukan dan gambarkan penjualan sebagai fungsi dari sejumlah roti (x).
2. Tentukan dan gambarkan biaya sebagai fungsi dari sejumlah roti (x).
3. Tentukan dan gambarkan keuntungan sebagai fungsi dari sejumlah roti (x).
4. Tentukan domain dan *range* dari penjualan.
5. Tentukan domain dan *range* dari biaya.
6. Tentukan domain dan *range* dari keuntungan.
7. Dapatkah kamu menyimpulkan jumlah minimum roti yang harus dijual?

Masalah Kedua

Perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 2.10 Jarak Henti Mobil

Seorang sopir sedang mengendarai mobil melewati sebuah desa kecil. Ketika melihat halangan di depan, sopir menginjak rem agar mobil berhenti. Jarak henti disebabkan oleh dua hal. Pertama, jarak henti akibat selang waktu yang diperlukan antara melihat halangan dan mengerem mobil (waktu ini disebut sebagai waktu reaksi). Jarak ini merupakan fungsi dari kelajuan yang diberikan oleh $S(x) = 0,25x$ dengan x merupakan kelajuan mobil dan 0,25 adalah waktu reaksi rata-rata dari manusia. Kedua, jarak tempuh akibat pengereman yang dinyatakan oleh $D(x) = \frac{x^2}{25}$ dengan x adalah kelajuan mobil. Lengkapi **Tabel 2.1** untuk menunjukkan jarak henti mobil (jarak total yang ditempuh) sesuai dengan kelajuan mobil.

Tabel 2.1 Jarak Henti Mobil

Kelajuan Mobil (m/s)	Jarak Henti Akibat Waktu Reaksi (m)	Jarak Henti Akibat Pengereman (m)	Jarak Henti Total (m)
6			
8			
10			
12			
14			
16			
18			



Ayo, Menggunakan Teknologi

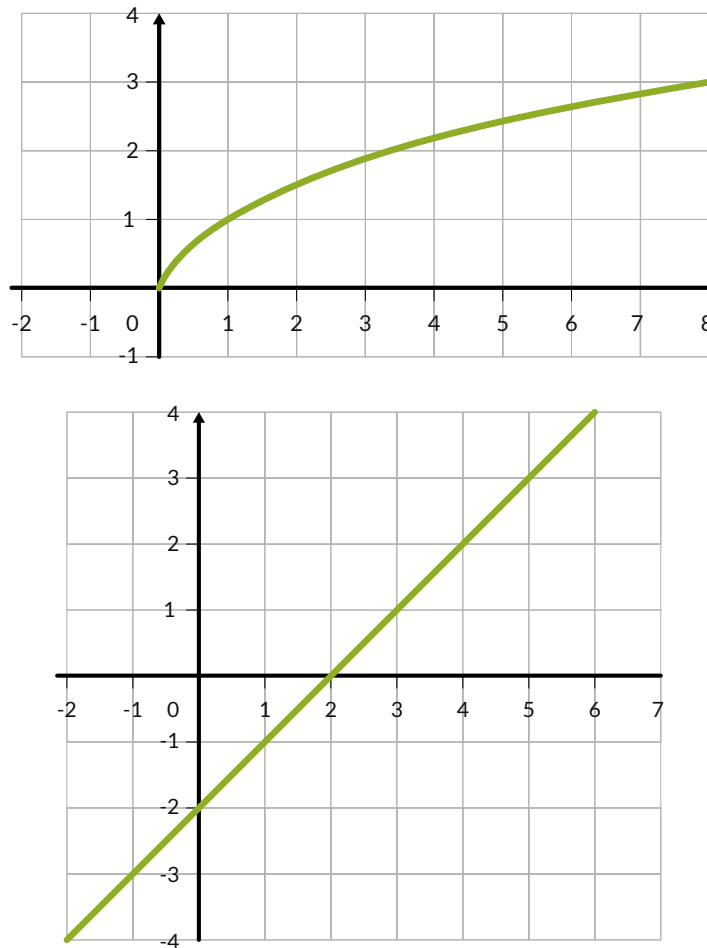
Grafik dapat digambar dengan menggunakan aplikasi atau secara manual.

1. Gambarkan grafik jarak henti akibat waktu reaksi manusia terhadap kelajuan.
2. Gambarkan grafik jarak akibat pengereman terhadap kelajuan.
3. Gambarkan grafik jarak henti total terhadap kelajuan.
4. Apakah grafik nomor (3) menunjukkan penjumlahan grafik (1) dan (2)? Tunjukkan dengan membandingkan beberapa nilai fungsi pada beberapa kelajuan yang berbeda.
5. Tentukan domain dan *range* dari penjumlahan grafik nomor (1) dan (2).

Penjumlahan dua atau lebih fungsi ternyata menghasilkan fungsi yang baru berdasarkan Eksplorasi 2.1. Lakukan eksplorasi di bawah ini untuk mempelajari penjumlahan dua fungsi lebih lanjut.

Masalah Ketiga

Perhatikan kedua grafik di bawah ini. Fungsi $f(x)$ (gambar atas) dijumlahkan dengan fungsi $g(x)$ (gambar bawah). Jumlahkanlah kedua grafik tersebut dengan menggambarannya sehingga diperoleh fungsi yang baru. Bagaimana dengan domain dan *range* dari fungsi yang baru?



Gambar 2.11 Dua Fungsi yang Akan Dijumlahkan

Berdasarkan ketiga eksplorasi di atas kamu menemukan bahwa dua fungsi dapat dijumlahkan atau dikurangkan sehingga diperoleh fungsi yang baru.

Kamu menemukan juga bahwa domain dan *range* dari fungsi yang baru belum tentu sama dengan domain dan *range* dari masing-masing fungsi. Contohnya, pada masalah pertama, domain dan *range* dari penjualan berbeda dengan keuntungan. Pada masalah ketiga, domain dari fungsi linier tidak sama dengan domain dan *range* dari penjumlahan fungsi linier dari fungsi akar. Kamu dapat menyimpulkan bahwa domain fungsi yang baru ternyata merupakan irisan dari kedua fungsi yang dijumlahkan atau dikurangkan.

Jika f dan g merupakan dua fungsi dengan domain masing-masing Df dan Dg , maka penjumlahan kedua fungsi $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ menghasilkan fungsi yang baru dengan domain $Df \cap Dg$.

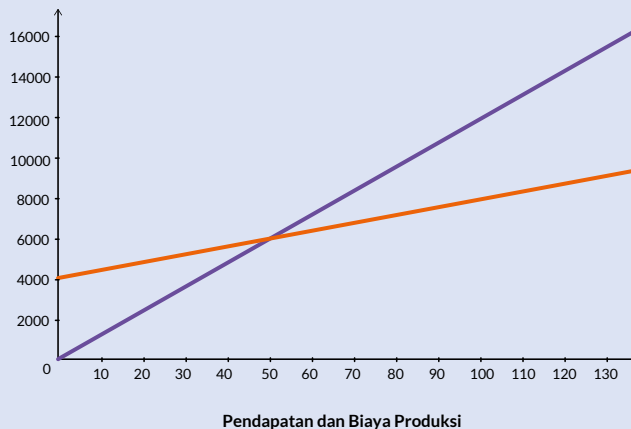
Jika f dan g merupakan dua fungsi dengan domain masing-masing Df dan Dg , maka pengurangan kedua fungsi $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ menghasilkan fungsi yang baru dengan domain $Df \cap Dg$.

Coba kamu pikirkan apakah kamu dapat melakukan operasi penjumlahan atau pengurangan untuk lebih dari dua fungsi.



Ayo, Mencoba

Perhatikan grafik pendapatan dan biaya total yang diberikan di bawah ini. Keduanya merupakan fungsi dari jumlah barang yang diproduksi.



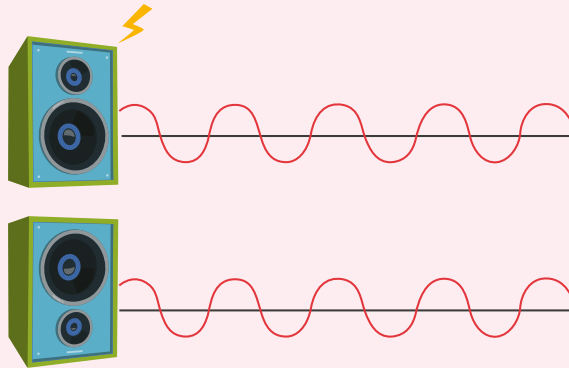
Gambar 2.12 Pendapatan dan Biaya Produksi

1. Buatlah tabel yang menunjukkan keuntungan sebagai fungsi dari jumlah barang. Tentukan juga domain dan *rangennya*!
2. Buatlah grafik yang mewakili keuntungan sebagai fungsi dari jumlah barang!



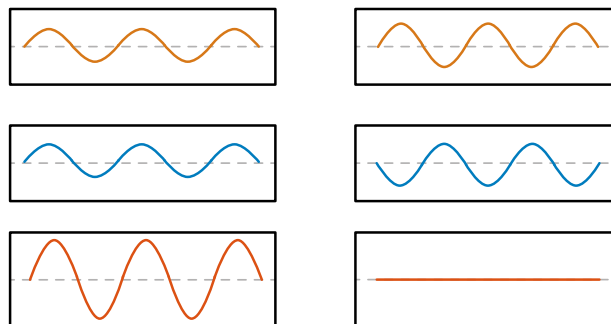
Tahukah Kamu?

Kamu pasti pernah berada dalam sebuah ruangan dengan dua pengeras suara (*loudspeaker*). Pernahkah kamu amati bahwa kamu mendengar bunyi yang tidak sama keras jika kamu berpindah posisi dalam ruangan tersebut. Pada posisi tertentu kamu mendengar bunyi yang paling keras, tetapi pada posisi lainnya kamu mendengar bunyi yang lemah. Kamu mendengarkan bunyi lemah dan keras bergantian.



Gambar 2.13 Dua Gelombang Bunyi dari Dua Pengeras Suara

Mengapa demikian? Bunyi mengalami interferensi, artinya gelombang bunyi dapat dipadukan jika bertemu. Perpaduan dua gelombang sama dengan melakukan penjumlahan dua fungsi gelombang. Penjumlahan kedua fungsi gelombang sebenarnya adalah penjumlahan kedua simpangan gelombang pada waktu yang sama. Simpangan gelombang ditunjukkan oleh ketinggian gelombang dalam grafik. Makin tinggi simpangan gelombang makin keras bunyi yang dihasilkan dan sebaliknya. Interferensi dua gelombang bunyi dapat menghasilkan pelemahan dan penguatan bunyi.



Gambar 2.14 Penjumlahan Dua Fungsi Gelombang Bunyi yang Menghasilkan Penguatan dan Pelemahan Bunyi

Semua jenis gelombang mengalami interferensi atau perpaduan gelombang. Penjumlahan dua fungsi gelombang dapat menghasilkan gelombang baru dengan simpangan yang lebih besar atau simpangan lebih kecil bahkan simpangan nol.



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kode QR berikut ini berisi video yang mengilustrasikan penjumlahan grafik dua fungsi gelombang. Setelah menonton video jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

1. Apa yang dimaksudkan dengan interferensi konstruktif?
2. Apa yang dimaksud dengan interferensi destruktif?



<https://bukupusbuk.id/s/oq8oz0>

b. Perkalian dan Pembagian Fungsi

Kamu telah mempelajari bahwa operasi penjumlahan dan pengurangan bisa diterapkan terhadap dua fungsi. Kamu dapat mencoba bagaimana operasi penjumlahan dan pengurangan fungsi dapat diterapkan pada lebih dari dua fungsi. Kamu mungkin bertanya lebih lanjut, bagaimana dengan operasi perkalian dan pembagian dua atau lebih fungsi?



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 2.2

Masalah Pertama

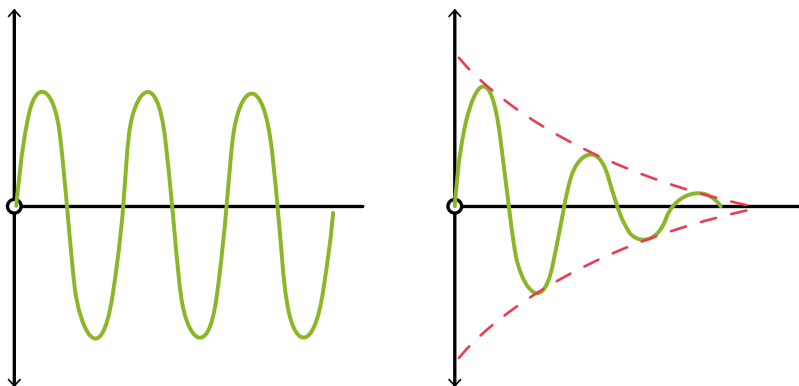
Seorang pemilik kantin sekolah menjual roti merek Lezat dengan harga Rp4.800,00 per buah. Roti tersebut dipesan dengan harga Rp3.900,00 per buah. Biaya pengantaran sebesar Rp22.000,00.

1. Tentukan keuntungan rata-rata per roti sebagai fungsi dari jumlah roti (x).
2. Tentukan domain dan *range* dari keuntungan rata-rata per roti sebagai fungsi dari jumlah roti (x).

3. Roti jenis lain dengan merek Segar dijual dengan harga Rp5.000,00 per buah dan roti tersebut dipesan dengan harga Rp4.200,00 per buah. Biaya pengantaran sebesar Rp20.000,00. Tentukan perbandingan keuntungan penjualan roti merek Lezat dengan roti merek Segar sebagai penjualan jumlah roti (x). Tentukan juga domainnya.

Masalah Kedua

Perhatikan kedua fungsi di bawah ini. Salah satunya adalah fungsi sinus yang menggambarkan perilaku osilasi atau getaran benda, yaitu besar simpangan terhadap waktu. Grafik yang lainnya menunjukkan osilasi yang teredam dengan besar simpangan terhadap waktu. Penggunaan *shock breaker* adalah contoh osilasi yang teredam. Biasanya, kamu belajar tentang getaran dan gelombang di kelas XI.



Gambar 2.15 Osilasi dan Osilasi yang Teredam

Pertanyaan

1. Perhatikan garis lengkung putus-putus. Kamu telah mempelajari pola fungsi tersebut. Menurutmu apa fungsi yang mewakilinya?
2. Osilasi teredam merupakan hasil operasi fungsi sinus dengan fungsi yang ditunjukkan oleh garis putus-putus. Apakah operasi tersebut berupa pengurangan atau perkalian? Jelaskan jawabanmu.
3. Bagaimana dengan domain dan *range* dari fungsi yang menyatakan osilasi teredam dibandingkan dengan fungsi sinus?

Berdasarkan eksplorasi di atas jelaslah bahwa domain dan *range* dari operasi perkalian atau pembagian fungsi dapat berbeda dibandingkan dengan

fungsi masing-masing sebelum dioperasikan. Kamu dapat menyimpulkan bahwa domain fungsi yang baru merupakan irisan dari kedua fungsi yang dikalikan atau dibagi.

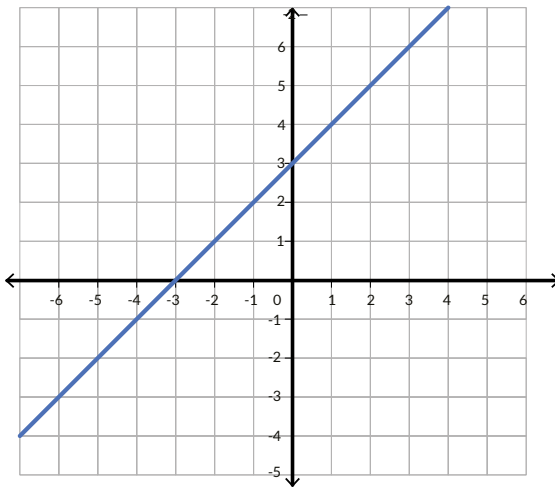
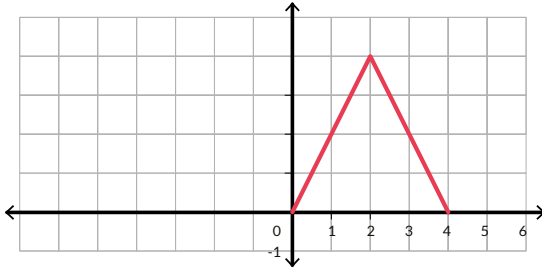
Jika f dan D merupakan dua fungsi dengan domain masing-masing Df dan Dg , maka perkalian $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ menghasilkan fungsi yang baru dengan domain $Df \cap Dg$.

Pembagian dua fungsi f/g secara umum belum tentu menghasilkan suatu fungsi. Syarat f/g menjadi sebuah fungsi yaitu pembagi g tidak boleh bernilai f . Dapat dikatakan bahwa f/g adalah fungsi dengan domain $(Df \cap Dg) - \{x | g(x) = 0\}$.

Latihan 2.1

- Jika $f(x) = \{(-3, 10), (-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5), (3, 10)\}$ dan $g(x) = \{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ Tentukan domain dan *range* dari
 - $f + g$
 - $f - g$
 - fg
 - f/g
- Jika $f(x) = \sqrt{x+3}$ dan $g(x) = x^2 + 3$
 - Tentukan $f(x) + g(x)$
 - Tentukan domain dan *range* dari $f(x) + g(x)$
- $f(x) = x^2 + 2x + 2$ dan $g(x) = 2x - 5$
 - Tentukan $f(x) - g(x)$
 - Tentukan domain dan *range* dari $f(x) - g(x)$
- Buatlah suatu fungsi kuadrat dan suatu fungsi eksponensial dengan domain tertentu! Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan kedua fungsi tersebut dengan domainnya.

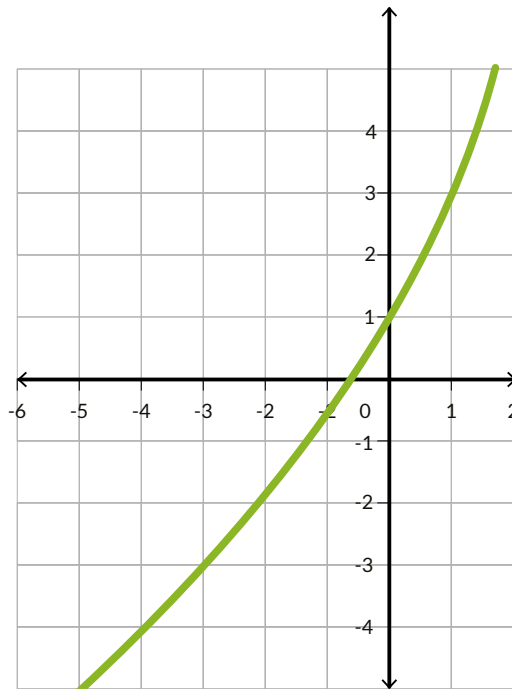
5. Di bawah ini ada dua fungsi, yaitu $f(x)$ (berwarna merah) dan $g(x)$ (berwarna biru).



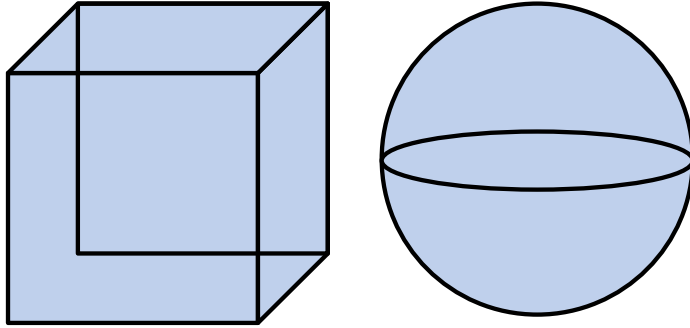
Tentukan

- $(f + g)(2)$
 - $(f - g)(1)$
 - $(fg)(3)$
 - $\left(\frac{f}{g}\right)(4)$
6. Pendapatan dari penjualan suatu produk adalah $R(x) = -20x^2 + 1000x$, sedangkan biaya produksi $C(x)$ adalah $80x + 4000$. Jumlah produk dinyatakan dalam x . Tentukan keuntungan sebagai fungsi dari jumlah produk x .
7. Jika $f(3) = 7$ dan $g(3) = 6$, tentukan
- $2f(3) + 3g(3)$
 - $2f(3) - 3g(3)$

- c. $-2f(3) \times \frac{2}{3}g(3)$
 - d. $2f(3) \div \frac{2}{3}g(3)$
 - e. Jika $f(2) = 3$ dan $fg(2) = -2$ maka tentukan $g(2)$.
 - f. Ada dua fungsi, yaitu $f(x) = x^2 - 1$ dan $g(x) = x - 3$. Tentukan pembuat nol dari perkalian fg .
8. Suatu fungsi f merupakan garis lurus yang memotong sumbu y pada titik $(0,4)$ dengan gradien 2. Suatu fungsi g merupakan sebuah garis lurus yang memotong sumbu x pada titik $(-5,0)$ dan melalui titik $(-2,-3)$.
 - a. Tentukan pembuat nol dari $h = fg$.
 - b. Apakah fungsi $h = fg$ mempunyai titik minimum atau titik maksimum? Jika ada, tentukan titik tersebut.
 - c. Tentukan domain dan range dari $h = fg$.
 9. Perhatikan grafik di bawah ini.
 Fungsi k yang ditunjukkan dalam grafik merupakan penjumlahan dua fungsi. Pilih kedua fungsi dari tiga fungsi yang diberikan di bawah ini yang menghasilkan fungsi $k(x)$.
 $f(x) = x$, $g(x) = 2x^2$, dan $h(x) = 2^x$
 Jelaskan alasan pemilihan kedua fungsi tersebut.



10. Rasio luas permukaan terhadap volume merupakan konsep yang penting dalam industri pengepakan benda. Coba kamu pikirkan mengapa demikian. Tentukan bentuk mana yang memberikan rasio luas permukaan terhadap volume jika sisi kubus sama dengan diameter bola, yaitu sebesar x .



Gambar 2.16 Kubus dan Bola

2. Pengertian Komposisi Fungsi

Potongan harga dan diskon merupakan hal yang biasa ditemui dalam kehidupan sehari-hari. Misalkan, sebuah toko memberikan penawaran khusus akhir pekan dengan dua pilihan. Pilihan pertama ialah “diskon 20%” terhadap semua barang dengan tambahan potongan harga sebesar Rp25.000,00 setelah diskon 20%. Pilihan kedua adalah potongan harga sebesar Rp25.000,00 dilanjutkan diskon 20% setelah potongan harga. Apakah kedua pilihan penawaran tersebut sama? Jika tidak, pilihan mana yang lebih menguntungkan untuk pembeli?

Apakah operasi kedua fungsi ini merupakan operasi penjumlahan atau pengurangan atau perkalian atau pembagian? Kamu dapat menentukannya dengan melakukan **Eksplorasi 2.3** dan eksplorasi selanjutnya.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 2.3

Masalah Pertama

Perhatikan gambar di bawah ini. Sebuah toko memberikan diskon 20% dan potongan harga Rp25.000,00 untuk sebuah produk tertentu.



Gambar 2.17 Diskon dalam Persen dan Potongan Harga

1. Lengkapi tabel di bawah ini.

Tabel 2.2 Harga dengan Diskon 20% dan Potongan Harga

Harga Awal	Diskon 20%	Potongan Rp25.000,00	Harga Akhir
Rp100.000,00			
Rp150.000,00			
Rp200.000,00			
Rp250.000,00			
x			

Apakah kamu sudah memahami cara menyelesaikan soal tersebut?

Pertanyaan

1. Buatlah pernyataan suatu fungsi yang menyatakan harga akhir dari permasalahan di atas.
2. Apakah hubungan antara *range* dari fungsi yang menyatakan diskon 20% dengan domain dari fungsi yang menyatakan potongan harga Rp25.000,00?

3. Buatlah pernyataan sebuah fungsi untuk masalah serupa di bawah ini. Jika harga awal adalah x dan harga akhir merupakan nilai fungsi $f(x) = y$, nyatakan y sebagai sebuah fungsi yang memodelkan diskon 30% dilanjutkan dengan potongan harga sebesar Rp10.000,00.

Kamu akan lebih memahami tentang komposisi fungsi dengan mengerjakan masalah kedua dan ketiga.

Masalah Kedua

Toko sering memberikan diskon ganda seperti yang ditunjukkan oleh gambar di bawah ini. Harga sebuah produk diberi diskon 50% kemudian diberikan diskon lagi 10%.



Gambar 2.18 Diskon Ganda

1. Gambarkan mesin fungsi yang menunjukkan pemahaman diskon ganda ini dengan x merupakan harga sebelum diskon ganda dan y adalah harga sesudah diskon ganda. Nyatakan fungsi pertama sebagai $f(x)$ dan fungsi kedua sebagai $g(x)$. Tuliskan hasil akhir, yaitu komposisi fungsi f dan g sebagai fungsi $h(x) = g(f(x))$.
2. Jika harga barang yang mengalami diskon ganda berkisar dari Rp100.000,00–Rp1.000.000,00 tentukan domain dan range dari fungsi h yang merepresentasikan masalah ini.

Kamu perhatikan bahwa dalam menyelesaikan kedua masalah di atas, kamu mengoperasikan fungsi pertama dengan masukan adalah harga awal kemudian hasil fungsi pertama (keluaran fungsi pertama) menjadi masukan yang akan dioperasikan dalam fungsi kedua untuk mendapatkan harga akhir.

Masalah Ketiga

Tumpahan minyak dari kapal tanker menyebabkan pencemaran laut. Misalkan, luas tumpahan minyak dinyatakan sebagai luas lingkaran A yang merupakan fungsi dari jari-jari r . Jika laju tumpahan minyak adalah $0,08 \text{ m/s}$ maka radius (jari-jari) wilayah yang tercemar diberikan oleh fungsi $r(t) = 0,08 t$ dengan t adalah waktu dalam detik. Perhatikan tabel di bawah ini dan lengkapilah.

Tabel 2.3 Radius dan Luas Tumpahan Minyak

t	$r(t) = 0,8t$	$A(r) = \pi r^2$
1		
2		
3		
4		
5		
6		

- a. Gambarkan jari-jari sebagai fungsi dari waktu dan luas sebagai fungsi dari jari-jari berdasarkan tabel di atas.
- b. Nyatakan luas lingkaran A sebagai fungsi dari waktu t .
- c. Gambarkan diagram panah untuk menyatakan komposisi kedua fungsi tersebut.

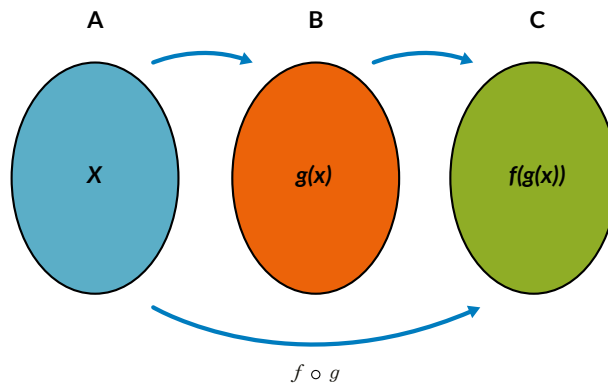


Ayo, Berkomunikasi

Kamu sudah mengeksplorasi tiga masalah yang berkaitan dengan komposisi fungsi. Jelaskan pengertian komposisi fungsi dengan kata-katamu sendiri.

Definisi Komposisi Fungsi:

Jika $g : A \rightarrow B$ dan $f : B \rightarrow C$ merupakan dua fungsi maka komposisi keduanya $f(g)$ dinyatakan dengan notasi $(f \circ g)$ adalah fungsi dari domain A ke kodomain C . Komposisi dua fungsi dapat dipahami melalui diagram panah berikut.



Gambar 2.19 Diagram Panah dari Komposisi Fungsi



Ayo, Mencoba

Perhatikan contoh yang ada kemudian selesaikan soal yang diberikan.

$f(x) = x + 1$ dan $g(x) = x^2$ maka

$$h(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$$

Jika $f(x) = x - 2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$ tentukan $h(x) = g(f(x))$.

Kamu sudah dapat menyelesaikan soal yang berkaitan dengan komposisi fungsi dari dua fungsi, sebut f dan g . Kamu juga sudah melihat hubungan antara domain dan *range* dari fungsi yang dikomposisikan. Pertanyaan penting selanjutnya adalah “Apa syarat agar fungsi f dan g dapat dikomposisikan?” Lakukan **Eksplorasi 2.4** untuk menjawab hal ini.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 2.4

Kamu mencari jawaban syarat agar fungsi f dan g dapat dikomposisikan melalui eksplorasi dua masalah.

Masalah Pertama

Perhatikan kedua tabel di bawah ini. **Tabel 2.4** menyatakan suatu fungsi g dan **Tabel 2.5** menyatakan suatu fungsi f .

Tabel 2.4 Tabel Fungsi g

x	$g(x)$
-4	-3
-3	-2
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5

Tabel 2.5 Tabel Fungsi f

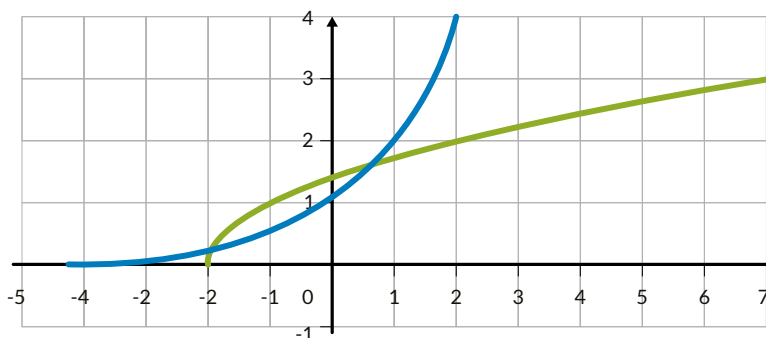
x	$f(x)$
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Pertanyaan

- Tentukan hasil dari fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ sebagaimana yang ditunjukkan oleh **Tabel 2.4** dan **Tabel 2.5** dalam bentuk pasangan berurutan.
- Tentukan hasil dari fungsi komposisi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ sebagaimana yang ditunjukkan oleh **Tabel 2.4** dan **Tabel 2.5** dalam pasangan berurutan.
- Apa yang dapat kamu simpulkan berdasarkan hasil a dan b?

Masalah Kedua

Perhatikan kedua grafik di bawah ini. Misalkan, fungsi yang dinyatakan oleh grafik biru adalah $f(x)$ dan fungsi yang dinyatakan oleh grafik hijau adalah $g(x)$. Bagaimana mengkomposisi $(f \circ g)(x)$ dengan memperhatikan domain dan *range*? Jelaskan jawabanmu!



Gambar 2.20 Grafik Dua Fungsi yang Akan Dikomposisikan

Kedua masalah di atas memberikan gambaran syarat agar dua fungsi dapat dikomposisikan. Syarat komposisi fungsi diberikan di bawah ini.

Dua fungsi f dan g dapat dikomposisikan sebagai $f \circ g$ jika **range** dari g merupakan **himpunan bagian dari domain** f .

Kamu perhatikan bahwa pemahaman himpunan bagian menjadi penting dalam syarat komposisi fungsi, yang baru muncul dalam **Eksplorasi 2.4**. Pada **Eksplorasi 2.3** kamu belum menyadari pentingnya pengertian himpunan bagian dalam penyelesaian masalah.

Pertanyaan menarik lainnya adalah “Apakah operasi komposisi fungsi memenuhi sifat komutatif dan asosiatif?” **Eksplorasi 2.5** memberikan jawaban atas pertanyaan ini.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 2.5

Sifat Komutatif

Masalah Pertama

Selidikilah apakah harga setelah diskon 25% yang dilanjutkan dengan diskon 20% sama dengan harga setelah diskon 20% yang dilanjutkan dengan diskon 25%. Apakah berlaku sifat komutatif dalam komposisi fungsi ini?

Masalah Kedua

Selidikilah apakah harga setelah diskon 25% yang dilanjutkan dengan potongan Rp15.000,00 sama dengan harga setelah kena potongan Rp15.000,00

yang dilanjutkan dengan diskon 25%. Apakah berlaku sifat komutatif dalam komposisi fungsi ini?

Masalah Ketiga

Perhatikan tiga fungsi di bawah ini, yaitu f , g dan h :

$$f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2 + 4, \text{ dan } h(x) = \frac{1}{(1+x)}$$

Tentukan domain dan *range* dari masing-masing fungsi!

- Berdasarkan informasi tentang domain dan *range* dari masing-masing fungsi, selidikilah apakah komposisi-komposisi di bawah ini merupakan fungsi : $g \circ f, f \circ g, f \circ h, h \circ f, g \circ h, h \circ g$!
- Mari cek apakah komposisi fungsi di bawah ini bersifat komutatif!
 - $g \circ f = f \circ g$?
 - $f \circ h = h \circ f$?
 - $g \circ h = h \circ g$?

Berdasarkan **Eksplorasi 2.5** ternyata **komposisi fungsi secara umum tidak memenuhi sifat komutatif**.

Sifat Asosiatif

Eksplorasi dilakukan untuk mengecek apakah operasi komposisi fungsi memenuhi sifat asosiatif.

Perhatikan kembali tiga fungsi di bawah ini, yaitu f , g , dan h : $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$, dan $h(x) = \frac{1}{1+x}$

- Selidikilah apakah operasi asosiatif secara umum berlaku untuk komposisi fungsi, dengan kata lain cek apakah persamaan-persamaan memang benar:
 - $(f(h \circ g))(x) = ((f \circ h) \circ g)(x)$?
 - $(h(f \circ g))(x) = ((h \circ f) \circ g)(x)$?
 - $(g(f \circ h))(x) = ((g \circ f) \circ h)(x)$?
- Pikirkan konfigurasi komposisi lain yang mungkin dari ketiga fungsi di atas. Cek apakah sifat asosiatif masih terpenuhi.

Berdasarkan **Eksplorasi 2.5**, ternyata **komposisi fungsi memenuhi sifat asosiatif**.

Latihan 2.2

- Jika $f(x) = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = 2x + 1$, tentukan
 - $(f \circ g)(x)$
 - $(f \circ g)(3)$ dan $(f \circ g)(-3)$.
 - $f(a)$ jika $(f \circ g)(a) = -1$.
- Jika $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ dan $g(x) = 2x^2 + 1$, tentukan
 - $(f \circ g)(x)$.
 - $(g \circ f)(x)$.
 - domain dan range dari $(f \circ g)(x)$.
 - domain dan range dari $(g \circ f)(x)$.
- Jika $f(x) = 6x - 5$ dan $g(x) = ax + b$, tentukan a dan b sehingga $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.
- Hasil dari $(f \circ g)(x) = (2x + 3)^3$ sedangkan $f(x) = x^3$ tentukan $g(x)$.
- Lengkapi ketiga tabel di bawah ini.

x	$f(x)$
-2	-6
-1	
0	-4
1	
2	-2

$f(x)$	$f(g(x))$
-6	4
-5	
-4	6
-3	7
-2	

x	$f(g(x))$

- Fungsi $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = 2x + 1$, dan $h(x) = 2x^2 + 1$.
Mungkinkah $(f \circ g \circ h)$ atau $(g \circ f \circ h)$ atau $(h \circ g \circ f)$ bernilai 0?
Jelaskan jawabanmu.
- Jika $f(3) = 7$, $g(3) = 6$, $f(6) = 13$, $g(6) = 12$, tentukan $(f \circ g)(3)$
- Jika $f(x) = (x + 2)^2$, $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$, tentukan $g(x)$.
- Sebuah pabrik memberikan ketentuan mengenai jumlah produksi dan jenisnya. Produksi telepon genggam berbasis android adalah dua kali

produksi telepon genggam berbasis bukan android, sedangkan produksi laptop adalah tiga kali produksi telepon genggam berbasis android.

- a. Gunakan mesin fungsi untuk menyatakan relasi antara produksi telepon genggam berbasis android x dan produksi laptop jika produksi laptop dinyatakan dengan y .
 - b. Jika diproduksi 2.000 telepon genggam berbasis bukan android, berapa banyak laptop yang dihasilkan? Selesaikan dengan menggunakan mesin fungsi.
10. Anton membeli sebuah meja belajar dari sebuah toko. Ada banyak pilihan meja dengan harga-harga yang bervariasi. Meja-meja tersebut berukuran besar. Anton memutuskan untuk menyewa jasa antar dari toko tersebut karena ukuran mobil Anton kecil. Setelah berdiskusi dengan pihak toko, maka total biaya yang harus dibayar adalah harga meja belajar, pajak pembelian, dan biaya angkut. Pajak pembelian sebesar 7.5% harga meja. Biaya angkut sebesar Rp20.000,00.
- a. Tuliskan fungsi $t(x)$ sebagai total harga meja yang mencakup harga meja dan pajak, dengan x adalah harga satu meja!
 - b. Tuliskan juga fungsi $f(x)$ sebagai total biaya yang mencakup harga meja dan biaya angkut!
 - c. Tuliskan kedua komposisi fungsi berikut $(f \circ t)(x)$ dan $(t \circ f)(x)$! Manakah dari kedua fungsi yang memberikan biaya yang lebih kecil untuk setiap harga meja?
 - d. Peraturan daerah di tempat Anton tinggal tidak memungut pajak dari biaya angkut. Komposisi fungsi mana dari bagian c yang sejalan dengan perda ini?

B. Fungsi Invers

Kamu pasti sering menemukan kata-kata dalam bahasa Inggris dalam kehidupan sehari-hari, baik lewat film, berita, cerita, ataupun lagu. Kamu memahami artinya dengan menerjemahkan ke dalam bahasa Indonesia. Misalkan ada mesin penerjemah dari bahasa Inggris ke bahasa Indonesia sebagaimana yang diilustrasikan berikut ini.



Gambar 2.21 Mesin Penerjemahan Bahasa Inggris-Indonesia

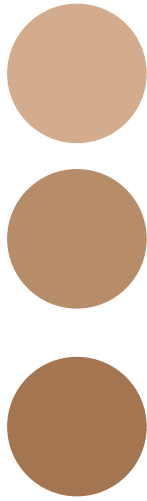
Dapatkah kamu menerjemahkan nama mata pelajaran dari bahasa Indonesia ke dalam bahasa Inggris dengan mesin penerjemah tersebut?

Pertanyaan selanjutnya, Apakah proses kebalikan dapat kamu terapkan juga untuk semua relasi dalam matematika, sebagaimana yang ditunjukkan oleh mesin penerjemah bahasa?

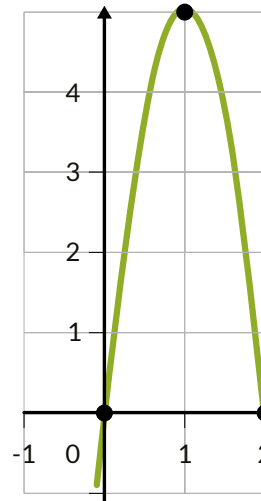
Berdasarkan **Gambar 2. 21**, kamu memahami bahwa dengan membalikkan arah panah dari operasi, maka untuk setiap mata pelajaran dalam bahasa Indonesia (keluaran), kamu bisa mencari kata dengan arti yang sama dalam bahasa Inggris (masukan). Prosedur ini membentuk sebuah relasi kebalikan (*invers*) antara anggota-anggota keluaran dan masukan. Apakah relasi kebalikan ini berlaku juga pada fungsi? Apakah setiap relasi kebalikan akan membentuk suatu fungsi yang disebut sebagai fungsi *invers*? Pertanyaan ini akan bisa kamu jawab dengan memahami terlebih dahulu fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.

1. Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif

Perhatikan grafik posisi benda terhadap waktu dari benda dilemparkan ke atas, seperti yang diberikan berikut ini. Kamu dapat membayangkan bahwa bola bergerak ke atas kemudian akan turun ke bawah.



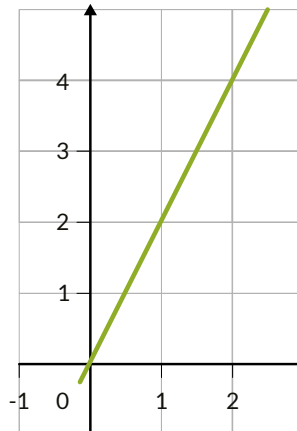
Gambar 2.22 Bola Bergerak ke Atas Kemudian ke Bawah



Gambar 2.23 Grafik Posisi terhadap Waktu dari Bola yang Bergerak Vertikal ke Atas dan ke Bawah

Apakah kamu menemukan nilai posisi yang sama pada waktu berbeda? Kamu pasti paham bahwa benda yang bergerak naik ke atas akan mencapai titik maksimum kemudian turun ke bawah lagi. Benda tersebut akan melewati posisi yang sama baik pada saat bergerak naik maupun bergerak turun. Kamu dapat menyimpulkan bahwa untuk dua nilai masukan berbeda diperoleh satu keluaran.

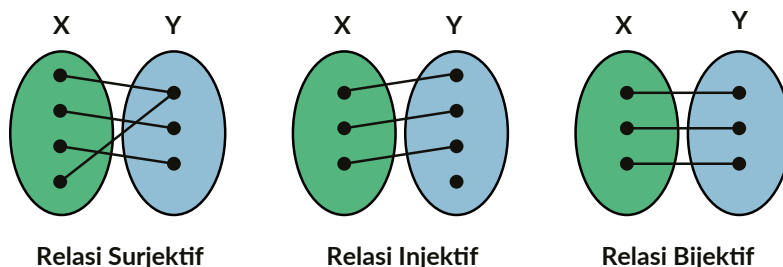
Perhatikan **Gambar 2.24**. Kamu dapat melihat hubungan antara posisi terhadap waktu untuk benda yang bergerak dengan kecepatan tetap.



Gambar 2.24 Grafik Posisi terhadap Waktu dari Benda Bergerak dengan Kecepatan Tetap

Kamu dapat menyimpulkan dari grafik tersebut bahwa untuk nilai masukan yang berbeda diperoleh nilai keluaran yang berbeda, tidak ada dua masukan berbeda yang menghasilkan keluaran yang sama. Relasi dalam **Gambar 2.23** berbeda jenis dengan relasi dalam **Gambar 2.24**.

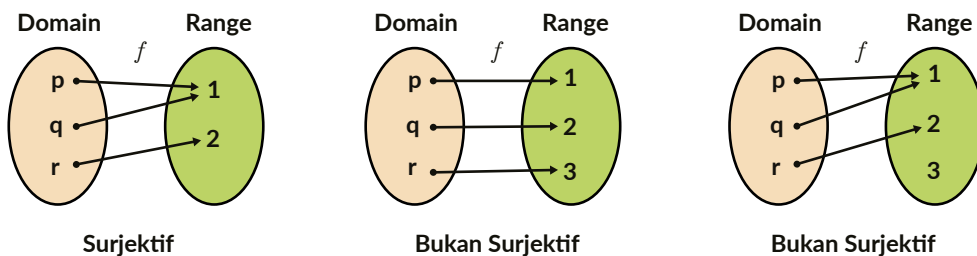
Berdasarkan jenis relasinya, fungsi dibagi menjadi tiga jenis:



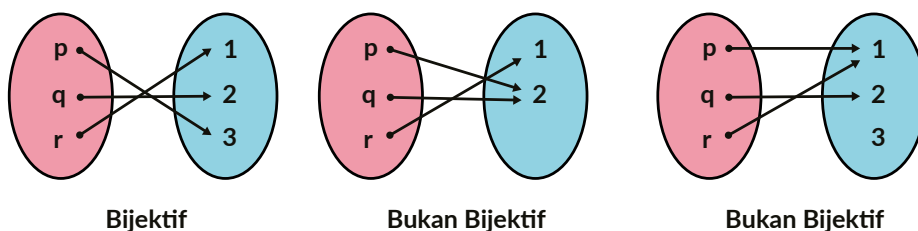
Gambar 2.25 Fungsi Surjektif, Fungsi Injektif, dan Fungsi Bijektif

Fungsi surjektif disebut sebagai fungsi *onto*, fungsi injektif disebut sebagai fungsi satu-satu, dan fungsi bijektif disebut sebagai korespondensi satu-satu.

Perhatikan **Gambar 2.26** yang mempertegas pemahaman fungsi surjektif.



Gambar 2.26 Fungsi Surjektif dan Bukan Fungsi Surjektif



Gambar 2.27 Fungsi Bijektif dan Bukan Fungsi Bijektif



Ayo, Berdiskusi

1. Menurutmu, nomor kartu tanda penduduk setiap warga negara yang berusia 17 tahun ke atas termasuk relasi jenis apa?
2. Diskusikan contoh kehidupan sehari-hari yang merupakan relasi bijektif.
3. Menurutmu, termasuk jenis fungsi apakah yang ditunjukkan oleh grafik dalam **Gambar 2.23** dan **Gambar 2.24**?



Ayo, Berkomunikasi

Jelaskan pengertian fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif dengan kata-katamu sendiri! Hubungkan juga ketiga jenis fungsi tersebut dengan pemahaman domain, kodomain, dan *range*.



Ayo, Berpikir Kritis

Setujukah kamu dengan pendapat bahwa fungsi eksponensial merupakan fungsi bijektif? Jelaskan alasannya!

Komposisi Dua Fungsi Injektif dan Dua Fungsi Surjektif



Ayo, Bekerja Sama

- Misalkan $g : A \rightarrow B$ dan $f : B \rightarrow C$ merupakan dua fungsi injektif. Apakah fungsi komposisi $f \circ g$ juga bersifat injektif? Berikan alasanmu!
- Misalkan $g : A \rightarrow B$ dan $f : B \rightarrow C$ merupakan dua fungsi surjektif. Apakah fungsi komposisi $f \circ g$ juga bersifat surjektif? Berikan alasanmu!

2. Fungsi Invers

a. Pengertian Fungsi Invers

Fungsi invers merupakan kebalikan dari suatu fungsi. Pertanyaan yang membawa rasa ingin tahumu adalah “Fungsi seperti apa yang memiliki kebalikan atau invers? Bagaimana membentuk sebuah fungsi invers dari sebuah fungsi asal?” Kamu lakukan eksplorasi di bawah sebagai pengantar fungsi invers.

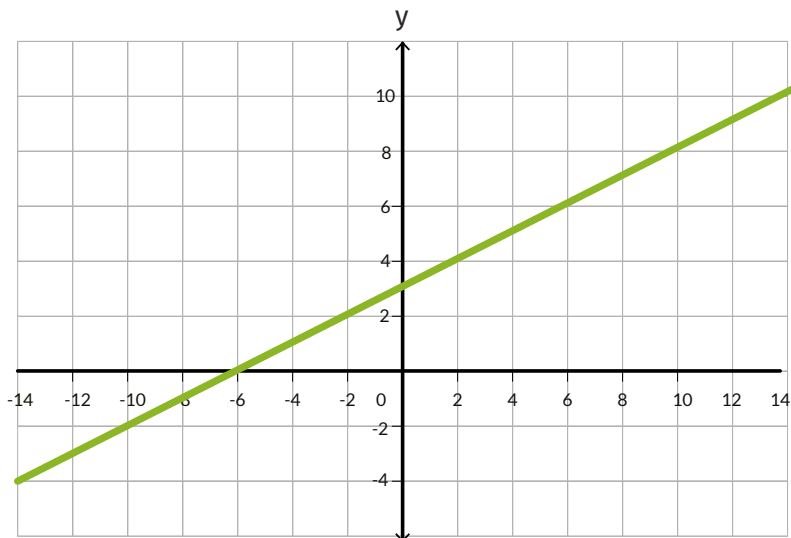


Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 2.6

Masalah Pertama

Perhatikan grafik garis lurus di bawah ini.

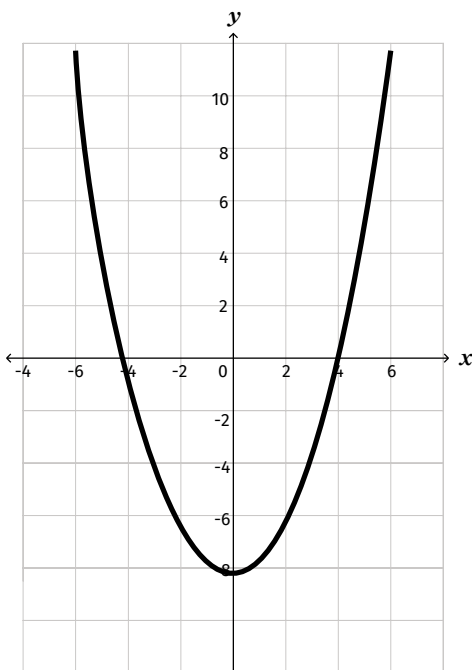


Gambar 2.28 Grafik Garis Lurus $y = \frac{1}{2}x + 3$

1. Pilih dan tuliskan lima koordinat (x, y) dari grafik di atas. Contoh $(2, 4)$.
2. Tuliskan juga lima koordinat (y, x) berdasarkan pemilihan dalam nomor (1). Contoh koordinat $(2, 4)$ bersesuaian dengan $(4, 2)$. Gambarkan grafiknya. Apakah grafik ini menunjukkan suatu fungsi?
3. Termasuk jenis relasi apakah yang ditunjukkan oleh nomor (1) dan (2)?

Grafik nomor (2) merupakan relasi berkebalikan (relasi invers) dari fungsi yang dinyatakan oleh $y = \frac{1}{2}x + 3$. Grafiknya merupakan garis lurus sehingga fungsi kebalikan (fungsi invers) dari $y = \frac{1}{2}x + 3$ juga merupakan suatu fungsi yaitu $y = 2x - 6$.

Perhatikan grafik fungsi kuadrat di bawah ini.



Gambar 2.29 Grafik Fungsi Kuadrat $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$

1. Pilih dan tuliskan lima koordinat (x, y) dari grafik di atas.
2. Tuliskan juga lima koordinat (y, x) berdasarkan pemilihan dalam nomor (1). Gambarkan grafiknya. Apakah grafik ini menunjukkan suatu fungsi?
3. Termasuk jenis relasi apakah yang ditunjukkan oleh grafik (1) dan (2)?

Grafik dari relasi berkebalikan (relasi invers) dari fungsi $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$ merupakan parabola yang terbuka ke samping sehingga fungsi kebalikan (fungsi invers) dari $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$ bukanlah merupakan suatu fungsi.

Masalah Kedua

Tes Garis Horizontal merupakan tes yang digunakan untuk menentukan apakah suatu fungsi mempunyai invers atau tidak. Selidiki terlebih dahulu apa yang

dimaksud dengan Tes Garis Horizontal. Terapkan pada fungsi eksponensial dan fungsi kuadrat untuk menentukan apakah kedua fungsi tersebut mempunyai invers.

Masalah Ketiga

Sebuah perusahaan pengepakan barang menyediakan kemasan berbentuk kubus untuk memuat mainan bola dengan berbagai ukuran. Jika ukuran bola diketahui maka ukuran kubus dapat ditentukan. Jika sisi kubus diketahui maka dapat ditentukan luas bahan yang diperlukan untuk membuat sebuah kemasan. Pegawai perusahaan dapat memperkirakan luas bahan yang diperlukan berdasarkan pesanan kemasan. Perhatikan tabel di bawah ini yang menunjukkan hubungan antara luas permukaan kubus dengan sisi kubus yang memudahkan si pegawai untuk menentukan luas bahan yang digunakan dan juga sisi kubus jika diketahui luas bahan.

Tabel 2.6 Sisi dan Volume Kubus

Diameter Bola	Sisi Kubus x (cm)	Luas Permukaan Kubus $A(cm^2)$
8	8	
10	10	
12	12	
15	15	
16	16	
20	20	

1. Gambarkan diagram panah dari x ke A dan sebaliknya dari A ke x dalam satu diagram.
2. Termasuk relasi apakah hubungan antara luas permukaan kubus dengan sisi kubus? Injektif atau surjektif atau bijektif? Jelaskan jawabanmu.
3. Bagaimana menentukan perumusan sisi kubus sebagai fungsi dari luas permukaan kubus $x(A)$?

Relasi apa yang menentukan suatu fungsi memiliki fungsi invers? Berdasarkan tiga kegiatan eksplorasi di atas maka dapat disimpulkan bahwa secara umum **tidak semua fungsi memiliki fungsi invers**. Hanya fungsi **bijektif (injektif dan surjektif)** lah yang memiliki invers.



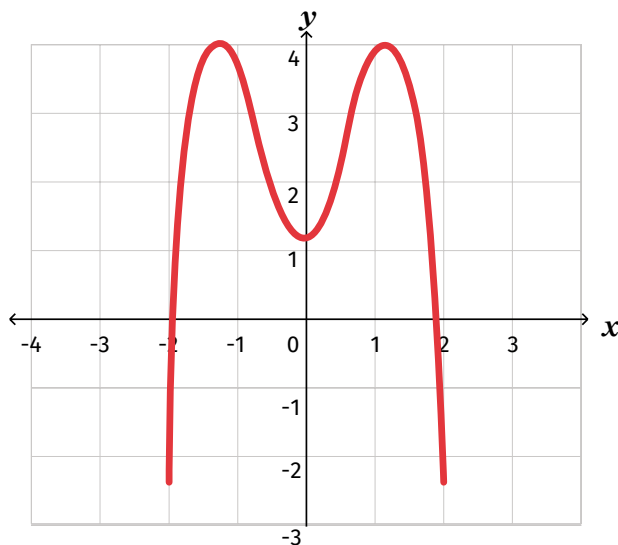
Ayo, Berdiskusi

Mengapa hanya fungsi bijektif saja yang dapat memiliki invers? Pikirkanlah jawabannya bersama teman-temanmu!



Ayo, Berpikir Kritis

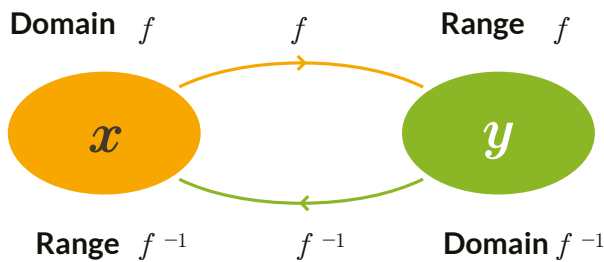
Apakah suatu relasi dapat dibuat menjadi fungsi bijektif? Perhatikan grafik di bawah ini. Pikirkan cara membuat fungsi ini menjadi fungsi bijektif dengan mempertimbangkan kembali domain fungsi.



Gambar 2.30 Grafik Suatu Fungsi

Fungsi yang berkebalikan operasinya dari fungsi asalnya disebut sebagai **fungsi invers**. Fungsi ini memetakan anggota yang ada di *range* fungsi asal ke anggota yang ada di domain fungsi asal. Fungsi invers dituliskan sebagai f^{-1} . Kamu perhatikan bahwa -1 di sini bukan merupakan sebuah pangkat.

Berdasarkan definisi fungsi invers yang baru dijelaskan sebelumnya, maka hubungan antara domain dan *range* dari fungsi asal dan fungsi invers dapat dipahami melalui diagram panah berikut.



Gambar 2.31 Domain dan Range dari Fungsi Asal dan Fungsi Invers



Ayo, Berdiskusi

Diskusikan pertanyaan-pertanyaan ini, “Apakah fungsi selalu mempunyai invers? Jika iya, apakah invers suatu fungsi juga merupakan fungsi?”

Penguatan pemahaman syarat fungsi invers dilakukan melalui **Eksplorasi 2.7**.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 2.7

Masalah berikut ini akan membantumu memahami bahwa syarat invers suatu fungsi adalah fungsi juga.

Sebuah mobil melaju di jalan raya. Kecepatan tiap menit diukur dan dicatat dalam tabel di bawah ini:

Tabel 2.7 Kecepatan Mobil Terhadap Waktu

Waktu (menit)(x)	Kecepatan Mobil (m/menit)(y)
1	100
2	180
3	193
4	185
5	180
6	165
7	175
8	186

Waktu (menit)(x)	Kecepatan Mobil (m/menit)(y)
9	190
10	166

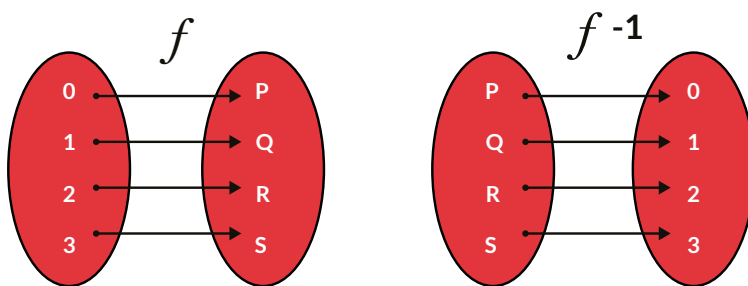
Berdasarkan data pada **Tabel 2.7**, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Apakah data waktu dan kecepatan membentuk relasi? Jika ya, apakah relasi itu adalah fungsi?
2. Plot data tersebut dengan sumbu x menunjukkan waktu dan sumbu y menunjukkan kecepatan.
3. Tentukan invers relasi dari pertanyaan (1)!
4. Berdasarkan definisi fungsi yang kamu pelajari, apakah relasi invers pada pertanyaan (3) adalah fungsi? Jelaskan alasanmu!
5. Apabila pada menit ke-5 kecepatan diubah menjadi 182 m/menit, apakah relasi antara waktu dan kecepatan merupakan fungsi injektif? Atau fungsi surjektif? Jelaskan jawabanmu.
6. Apakah perubahan pada nomor 5 menyebabkan invers relasi adalah fungsi? Jika ya, apakah merupakan fungsi bijektif?

Tidak setiap fungsi mempunyai suatu invers dan invers suatu fungsi pasti merupakan suatu fungsi juga.

Coba kamu pikirkan pertanyaan ini. “Apakah ada hubungan antara fungsi invers dan komposisi fungsi? Apakah komposisi fungsi dapat menunjukkan kedua fungsi tersebut memang saling berkebalikan?” Kamu pasti ingat bahwa dalam membuat komposisi dua fungsi maka keluaran fungsi pertama menjadi masukan fungsi kedua. Kamu juga sudah paham bahwa fungsi invers membalikkan keluaran menjadi masukan.

Perhatikan diagram panah dari suatu fungsi asal dan fungsi invers berikut.



Gambar 2.32 Diagram Panah dari Suatu Fungsi Asal dan Fungsi Inversnya

Pasangan berurutan yang merupakan hasil komposisi fungsi $f^{-1}f$ dapat dituliskan sebagai $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$. *Range* dari f^{-1} merupakan domain dari f . Jika masukan fungsi f adalah x maka keluaran f^{-1} adalah x juga.



Ayo, Berdiskusi

Jika diberikan $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = x - 1$ maka tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$. Apa yang dapat kamu simpulkan?

Fungsi f dan g saling berkebalikan jika $f \circ g = x$ dan $g \circ f = x$. Dapat dituliskan $f^{-1} = g$ dan $g^{-1} = f$.

b. Pembentukan Fungsi Invers dari Sebuah Fungsi Asal



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 2.8

Kamu akan menyelidiki dan membentuk fungsi yang merupakan kebalikan dari suatu fungsi dengan memecahkan dua masalah di berikut ini.

Masalah Pertama

Perhatikan tabel harga baju kaos di bawah ini.

Tabel 2.8 Banyak Baju Kaos dan Harganya

Banyak Baju Kaos (Masukan)	Harga Baju Kaos (Keluaran)
1	55.000
3	165.000
5	275.000
10	550.000

Buatlah tabel dengan membalikkan keluaran menjadi masukan dan masukan menjadi keluaran!

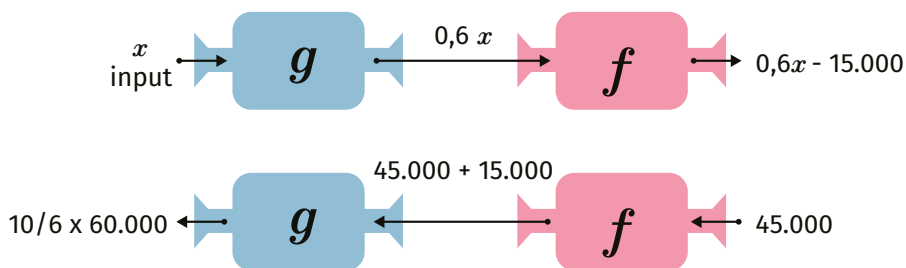
1. Buatlah grafik banyak baju kaos terhadap harga baju kaos dan grafik harga baju kaos terhadap banyak baju kaos. Jelaskan hasil yang kamu peroleh!
2. Tentukan domain dan *range* dari kedua grafik yang dihasilkan di bagian (1)!
3. Buatlah diagram panah yang menunjukkan fungsi asal.
4. Buatlah diagram panah yang menunjukkan fungsi yang berkebalikan dari fungsi asalnya.

Apa yang kamu peroleh dari eksplorasi di atas?

Masalah Kedua

Harga sebuah pakaian setelah mendapatkan diskon 40% dan kemudian diberikan potongan harga Rp15.000,00 adalah Rp45.000,00. Berapa harga awal pakaian?

1. Gunakan mesin fungsi untuk menyelesaikan masalah ini. Mulai kerjakan dari fungsi kedua yang dilanjutkan dengan fungsi pertama. Kerjakan secara terbalik.



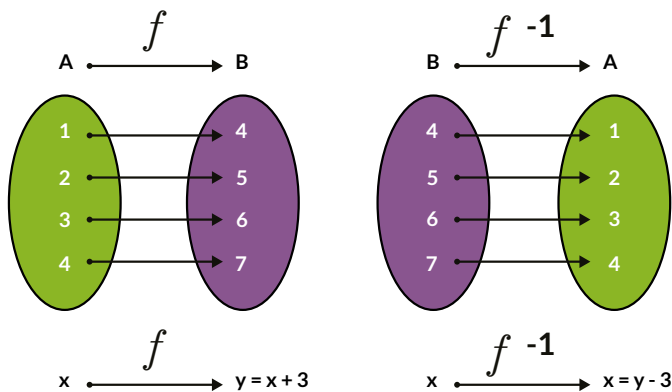
Gambar 2.33 Mesin Fungsi untuk Masalah Diskon Ganda

2. Jika harga awal pakaian adalah x dan harga akhirnya adalah y maka buatlah fungsi kebalikannya yaitu x adalah fungsi dari y .

Secara konsep, kamu menentukan fungsi invers dari fungsi asal dengan menggunakan diagram panah memang lebih intuitif karena membalik arah panah. Namun, sering kali kamu jumpai bahwa fungsi asal dituliskan dalam bentuk persamaan matematis dan kamu perlu menentukan fungsi invers dalam persamaan matematis. Berikut ini, langkah-langkah untuk menemukan persamaan fungsi invers dari fungsi asal.

1. Ubah $y = f(x)$ menjadi bentuk $x = f(y)$.
2. Ubah persamaan $x = f(y)$ menjadi bentuk $y = \dots$.
3. Ubahlah variabel y dengan $f^{-1}(x)$ dan sehingga diperoleh rumus fungsi invers $f^{-1}(x)$.

Perhatikan gambar diagram panah yang menunjukkan fungsi dan fungsi inversnya. Gunakan langkah-langkah di atas untuk menemukan fungsi invers dari f .



Gambar 2.34 Domain dan Range dari $y = x + 3$ dan $x = y - 3$.



Ayo, Berpikir Kritis

Setujukah kamu bahwa konversi satuan merupakan fungsi yang mempunyai invers? Jelaskan jawabanmu.

Berikan satu contoh konversi satuan, tentukan juga domain dan range-nya.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 2.9

Sebuah toko mainan memberikan potongan harga berupa diskon 20% dan dilanjutkan dengan potongan harga Rp10.000,00. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut!

1. Relasi $f : A \rightarrow B$ dipahami sebagai fungsi harga setelah diskon 20%, dengan A adalah domain harga asli, dan B adalah kodomain dengan anggota harga setelah diskon. Tuliskan persamaan matematis untuk fungsi ini!
2. Fungsi $g : B \rightarrow C$ adalah fungsi potongan harga Rp10.000,00 setelah diskon 20%, dengan C adalah harga akhir. Tuliskan persamaan matematis untuk fungsi ini!

3. Apakah benar harga akhir dapat diperoleh dengan cukup menggunakan fungsi $(g \circ f)(x)$? Jelaskan alasanmu!
4. Apakah perbedaan dari fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$?
5. Misal fungsi $(g \circ f)(x)$ memiliki invers. Jika diketahui harga akhir mainan, coba tuliskan fungsi yang dapat digunakan untuk memperoleh harga asal (gunakan fungsi invers dari g dan f lalu komposisikan)!
6. Gunakan fungsi dari nomor 5, untuk mengetahui harga asal mainan jika diketahui harga akhir sebesar Rp30.000,00!

7.



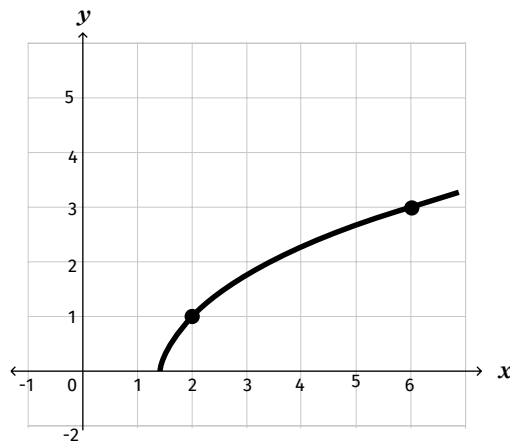
Ayo, Berpikir Kritis

Apakah benar secara umum, jika $(g \circ f)(x)$ memiliki invers maka $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$?

Latihan 2.3

1. Tunjukkan bahwa pasangan-pasangan fungsi di bawah ini merupakan fungsi dan fungsi inversnya.
 - a. $f(x) = 3x + 2$ dan $g(x) = \frac{(x-2)}{3}$
 - b. $f(x) = x^3$ dan $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$
2. Gambarkan fungsi-fungsi di bawah ini dan tentukan apakah fungsi-fungsi tersebut mempunyai fungsi invers. Jelaskan alasanmu!
 - a. $f(x) = x^2$
 - b. $f(x) = 2^x$
 - c. $f(x) = \sqrt{2x}$
3. Tentukan fungsi invers (jika ada) dari fungsi-fungsi di bawah ini, juga domain dan *range*-nya.
 - a. $f(x) = \frac{3}{x^3}$
 - b. $f(x) = \frac{-3}{(x^2+1)}$
 - c. $f(x) = \sqrt{x-3}$
 - d. $f(x) = \frac{x+4}{2x^2-5}$

4. Berikut ini adalah grafik dari fungsi $g(x) = \sqrt{2x - 3}$,



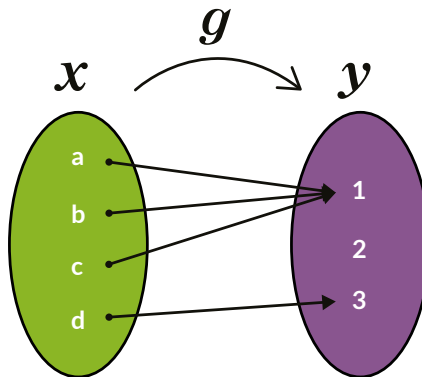
- Gunakan pencerminan terhadap $y = x$ dari fungsi $g(x)$ untuk mendapatkan fungsi invers $g^{-1}(x)$.
 - Tentukan persamaan matematis fungsi invers dari $g(x)$ dan plotlah grafik dengan menggunakan beberapa titik.
 - Bandingkan apakah grafik yang diperoleh dari (b) sama dengan grafik pada bagian (a).
5. Diketahui $f(x) = 2x + b$ dan $f(f(x)) = 4x + 6$. Tentukan nilai b dan $f^{-1}(x)$!

Uji Kompetensi

- Hubungan antara keuntungan yang diperoleh dengan harga barang yang dijual diberikan sebagai $U(x) = -75x^2 + 300x - 140$, dengan x adalah harga barang dalam kelipatan Rp10.000,00.
 - Apakah $U(x)$ merupakan suatu fungsi? Jelaskan!
 - Jika $U(x)$ merupakan suatu fungsi, tentukan domain dan rangenya!
 - Jika diinginkan keuntungan tertentu, dapatkah diketahui harga barang?
 - Jika $U(x)$ merupakan suatu fungsi, apakah fungsi ini mempunyai invers? Jelaskan!
- Berikan satu contoh situasi dalam kehidupan sehari-hari yang dapat dinyatakan dengan fungsi dan fungsi tersebut mempunyai invers. Contoh,

relasi antara biaya yang harus dibayar dan jumlah barang yang dibeli serta hubungan antara gaya yang diperlukan oleh sebuah mobil dan percepatan yang dialaminya.

3. Berikan satu contoh situasi dalam kehidupan sehari-hari yang dapat dinyatakan oleh fungsi dan fungsi tersebut tidak mempunyai invers. Contoh, relasi antara jarak tempuh dan waktu tempuh dari sebuah bola yang dilempar ke atas dan jatuh lagi ke bawah..
4. Berikan satu contoh situasi nyata yang bisa diberikan dalam bentuk komposisi fungsi. Contoh luas kain yang diperlukan untuk membuat pakaian. Harga kain merupakan fungsi dari luas kain.
5. Perhatikan diagram panah di bawah ini.
Apakah fungsi $g(x)$ mempunyai fungsi invers? Jelaskan!



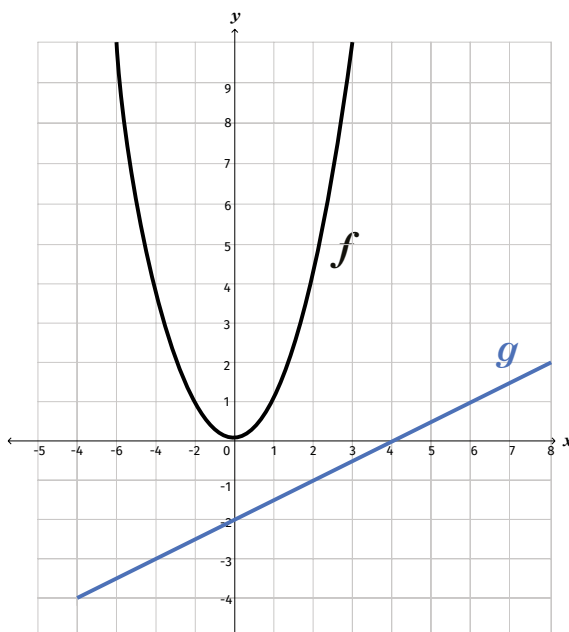
6. Perhatikan percakapan di bawah ini.

Anton : “Suatu fungsi dapat dipastikan mempunyai fungsi invers atau tidak dengan menggunakan diagram panah.”

Toni : “Saya tidak setuju karena diagram panah memberikan informasi terbatas.”

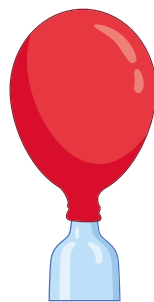
Setujukah kamu dengan pendapat keduanya? Adakah pendapatmu yang diperlukan untuk melengkapi kedua pendapat tersebut?

7. Perhatikan kedua grafik di bawah ini.



- Tentukan nilai $(f \circ g)(0)$
 - Tentukan nilai x yang menyebabkan $(f \circ g)(x) = 4$
 - Apakah $(f \circ g)(x)$ berupa fungsi linear atau kuadrat? Jelaskan!
 - Apakah $(g \circ f)(x)$ berupa fungsi linear atau kuadrat? Jelaskan!
 - Apa yang harus dilakukan dengan domain $f(x)$ jika diinginkan $f(x)$ mempunyai invers?
8. Perhatikan $f(x) = 3x + 1$ dan $g(x) = \frac{(x-1)}{3}$.
- Gambarkan kedua fungsi tersebut pada satu sistem koordinat.
 - Lakukan fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$. Jelaskan hasil yang diperoleh!
 - Berdasarkan hasil a dan b apakah yang dapat disimpulkan?
9. Soda kue jika direaksikan dengan asam cuka akan menghasilkan gas karbondioksida. Soda kue dan asam cuka disebut sebagai pereaksi, sedangkan gas karbondioksida adalah produk reaksi. Jumlah mol soda kue dan jumlah mol asam cuka yang direaksikan menentukan jumlah mol gas karbondioksida. Perhatikan gambar di bawah ini. Gas karbondioksida, hasil reaksi dari soda kue dan cuka, akan mengisi balon.

- a. Jari-jari balon merupakan fungsi dari jumlah gas karbondioksida jika balon berupa bola. Tuliskan fungsinya!
- b. Jumlah gas karbondioksida sebagai fungsi dari jumlah pereaksi. Tuliskan fungsinya!
- c. Berdasarkan a dan b maka jari-jari balon merupakan fungsi dari _____. Tuliskan fungsinya!



Gambar 2.35

Gas Karbondioksida Mengisi Balon

10. *Hang time* menunjukkan lamanya seseorang berada di udara setelah melompat hingga ketinggian tertentu. Makin tinggi lompatan makin lama seseorang berada di udara. Atlet-atlet olahraga tertentu, seperti bola basket, memerlukan *hang time* agar dapat memasukkan bola.



Hubungan antara ketinggian dan waktu diberikan oleh $h = \frac{1}{2}gt^2$. Jika kamu dapat mengetahui tinggi lompatan, kamu dapat menentukan lamanya berada di udara.

- a. Apakah *hang time* merupakan fungsi invers?
- b. Carilah *hang time* dari seorang pemain basket dunia. Jika diketahui
- c.



Ayo, Berpikir Kritis

Setujukah kamu bahwa ada hubungan antara kesempatan memasukkan bola dengan *hang time*?

Pengayaan



Ayo, Menggunakan Teknologi

Tentukan *hang time* dan ketinggian lompat dari beberapa orang, dapat anggota keluargamu atau temanmu. Kamu dapat mengambil data dengan menanyakan kepada mereka, tanpa harus mengukur waktu dan ketinggian mereka secara langsung.

1. Buatlah tabel dan plot grafiknya. Kamu dapat menggunakan *Microsoft Excel* untuk membuatnya.
2. Pilih satu *hang time* dan ketinggian lompat yang bersesuaian dengannya dari seorang atlet, lalu cocokkan dengan grafik yang kamu buat. Apakah sesuai?
3. Jika *hang time* merupakan fungsi dari ketinggian lompat, pikirkan satu hal yang memengaruhi ketinggian lompat. Nyatakan semua hubungan ini dalam mesin fungsi komposisi.

Refleksi

Pengalaman Saya	Bisa	Masih Perlu Belajar
Saya bisa menentukan komposisi dari dua fungsi		
Saya bisa menentukan domain, kodomain, dan <i>range</i> dari suatu fungsi komposisi		
Saya bisa memecahkan masalah nyata dengan menggunakan fungsi komposisi		
Saya bisa membedakan fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif		
Saya bisa menentukan fungsi invers dari suatu fungsi		
Saya bisa menentukan domain, kodomain, dan <i>range</i> dari fungsi invers		
Saya bisa memecahkan masalah nyata dengan menggunakan fungsi invers		

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2024

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI (Edisi Revisi)

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-388-329-0

Bab

3

Transformasi Fungsi



Bagaimana membangun fungsi baru dari fungsi yang sudah diketahui?

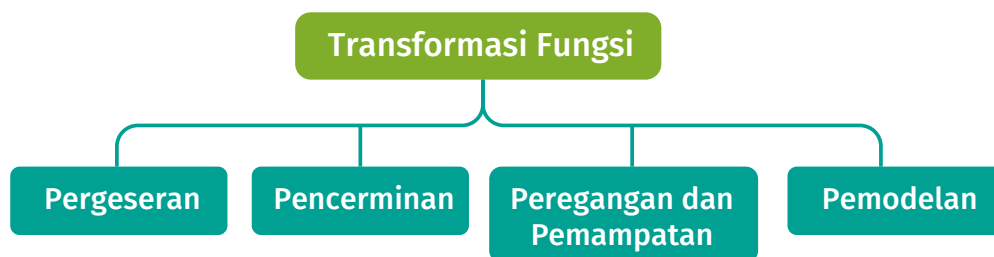
Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran ini kamu akan belajar cara membangun fungsi baru untuk memodelkan data dengan menggunakan transformasi fungsi.

Kata Kunci

- pergeseran
- pencerminan
- peregangan
- pemampatan
- pemodelan

Peta Konsep

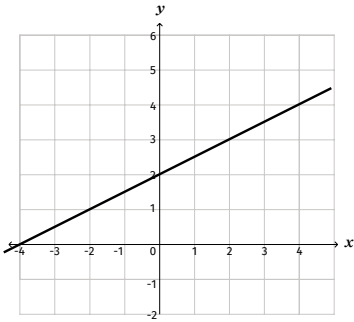
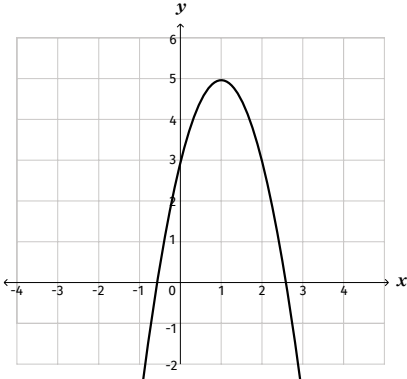


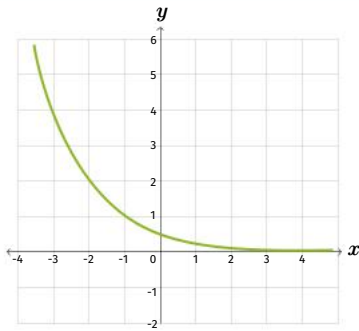
Pada fase D dan fase E kamu telah mempelajari fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi eksponensial. Dalam bab ini kamu akan belajar memodelkan situasi dunia nyata menggunakan fungsi yang sesuai (fungsi linear, fungsi kuadrat, atau fungsi eksponensial). Kamu akan belajar transformasi fungsi, yaitu cara membangun fungsi baru berdasarkan fungsi yang telah diketahui. Ada tiga jenis transformasi yang akan dipelajari dalam bab ini, yaitu pergeseran, pencerminan, serta peregangan dan pemampatan.



Ayo, Mengingat Kembali

Tentukan apakah termasuk fungsi linear, fungsi kuadrat, atau fungsi eksponensial dengan memberi tanda ✓ pada kolom yang tepat.

No.	Fungsi	Fungsi Linear	Fungsi Kuadrat	Fungsi Eksponensial
1.	$y = 2x - 5$			
2.	$y = (x + 3)^2 + 1$			
3.	$y = 2^{(x-1)} + 3$			
4.				
5.				

No.	Fungsi	Fungsi Linear	Fungsi Kuadrat	Fungsi Eksponensial
6.				

A. Pergeseran



Gambar 3.1 Baris-berbaris

Gambar 3.1 menunjukkan kegiatan baris-berbaris. Ketika pemimpin barisan memerintahkan "dua langkah ke kanan", maka seluruh peserta bergeser ke kanan. Gerakan tersebut merupakan contoh dari pergeseran.

Fungsi juga dapat mengalami pergeseran. Pada subbab A, kamu akan mempelajari berbagai jenis pergeseran fungsi melalui kegiatan eksplorasi. Dengan mengamati perubahan grafik, kamu akan menemukan hubungan antara bentuk fungsi dasar dan hasil pergeserannya.

1. Pergeseran Vertikal

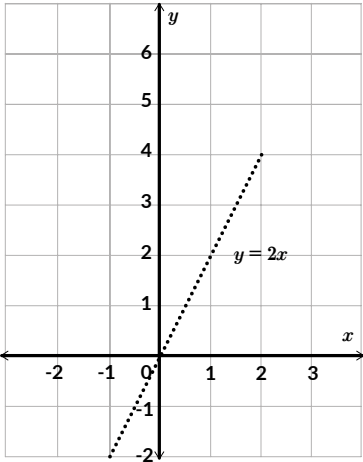
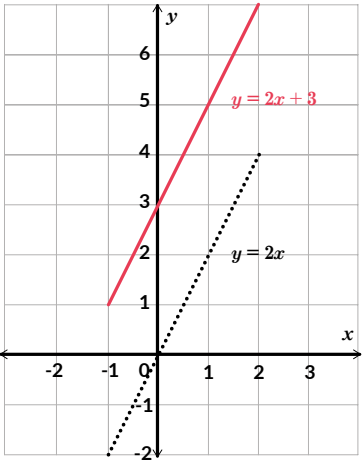


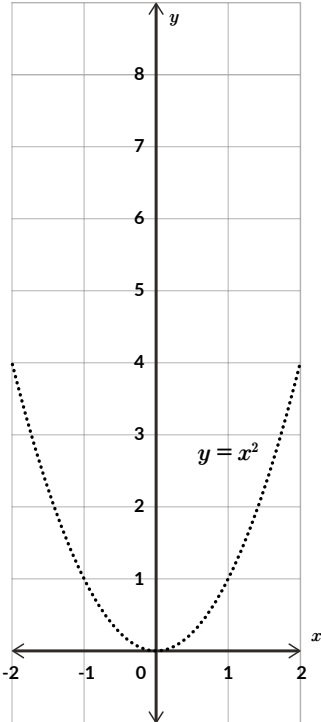
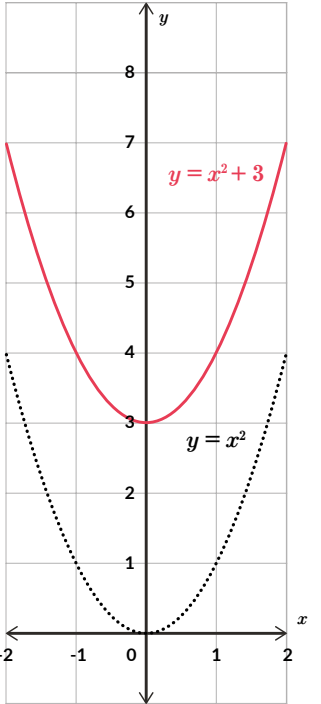
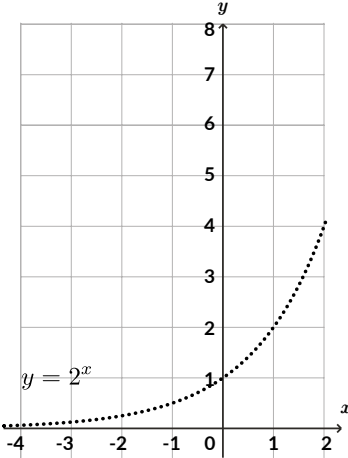
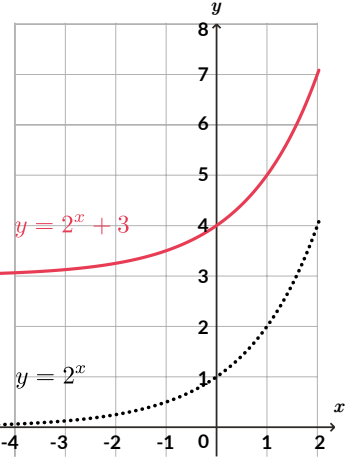
Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 3.1

Amati **Tabel 3.1** yang memuat tiga pasang fungsi. Analisislah setiap pasang fungsi tersebut dan jawablah pertanyaan-pertanyaan yang menyertainya.

Tabel 3.1 Fungsi Hasil Pergeseran Secara Vertikal

	Fungsi Dasar	Hasil Pergeseran
Fungsi Linear	 $y = 2x$	 $y = 2x + 3$

	Fungsi Dasar	Hasil Pergeseran
Fungsi Kuadrat	 $y = x^2$	 $y = x^2 + 3$
Fungsi Eksponensial	 $y = 2^x$	 $y = 2^x + 3$

1. Bandingkan fungsi dasar dan fungsi hasil pergeseran. Perubahan apa yang terjadi? Untuk membantumu menjawab, pilih sebuah nilai x , kemudian bandingkan nilai y pada kedua fungsi.

Fungsi	x	y_1 (Nilai y pada fungsi dasar)	y_2 (Nilai y pada fungsi hasil pergeseran)

2. Tuliskan dugaanmu berdasarkan hasil pengamatan berikut.
 - a. Apa yang terjadi pada fungsi, jika $y = f(x)$ diubah menjadi $y = f(x) + k$?
 - b. Bagaimana jika nilai k negatif?

3.



Ayo, Berpikir Kritis

Ujilah dugaanmu dengan langkah-langkah berikut.

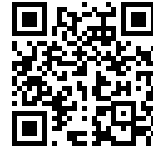
- a. Tentukan sebuah fungsi, kemudian gambarkan grafiknya.
- b. Tentukan besar dan arah pergeseran yang akan kamu lakukan.
- c. Tentukan fungsi hasil pergeseran.
- d. Gambarkan grafik fungsi hasil pergeseran.
- e. Amati kedua grafik. Apakah dugaanmu benar?



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menjawab pertanyaan nomor 1-3 dengan menggunakan aplikasi *GeoGebra*.

- Klik tautan atau pindai kode respons cepat berikut
- Pilih salah satu fungsi dasar (klik kotak yang bersesuaian) dan hasil pergeserannya (kotak di sampingnya).
- Geser-geserlah tombol yang mengubah nilai k . (Pastikan nilai $h = 0$)
- Perhatikan grafik dan persamaan dari fungsi hasil pergeseran.
- Ulangi untuk fungsi dasar yang berbeda.



Pergeseran

<https://bukupusbuk.id/s/s6d6tk>

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut:

- a. Apa dugaanmu mengenai pengaruh nilai k ?
- b. Apakah nilai k memberi pengaruh yang sama terhadap ketiga fungsi dasar?
- c. Apa yang terjadi jika k bernilai negatif?

Setelah menjawab pertanyaan nomor 1-3 pada Eksplorasi 3.1, kamu tentu melihat bahwa fungsi dapat digeser sehingga menghasilkan fungsi lain. Fungsi $y = f(x)$

- jika digeser 3 satuan ke atas menghasilkan $y = f(x) + 3$,
- jika digeser 1 satuan ke atas menghasilkan $y = f(x) + 1$,
- jika digeser 1 satuan ke bawah menghasilkan $y = f(x) - 1$.

Dapat dikatakan:

Jika fungsi $y = f(x)$ digeser sejauh k satuan ke atas maka fungsi tersebut berubah menjadi $y = f(x) + k$.

2. Pergeseran Horizontal

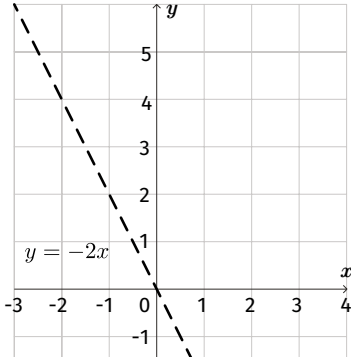
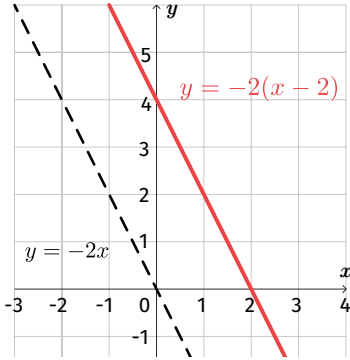
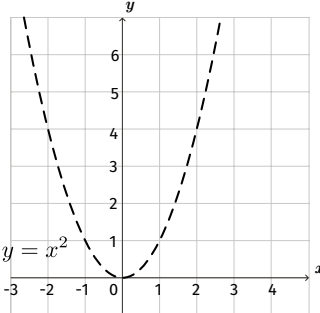
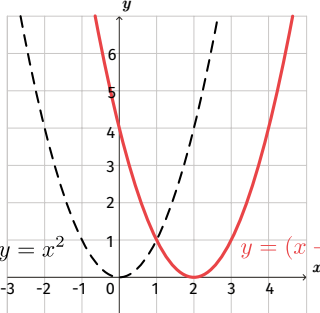


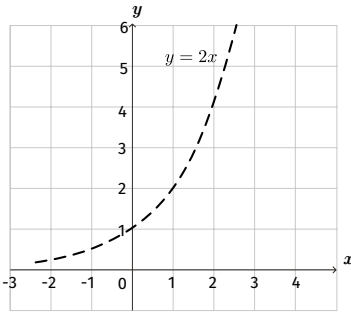
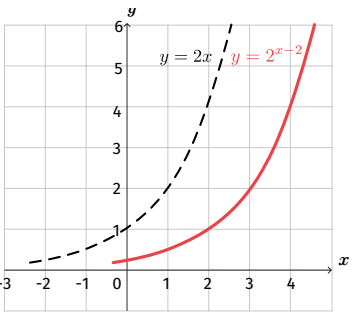
Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 3.2

Amati Tabel 3.2 yang memuat tiga pasang fungsi. Kemudian analisislah setiap pasang fungsi tersebut dan jawablah pertanyaan-pertanyaan yang menyertainya.

Tabel 3.2 Fungsi Hasil Pergeseran Secara Horizontal

	Fungsi Dasar	Fungsi Hasil Pergeseran
Fungsi Linear	 $y = -2x$	 $y = -2(x - 2)$
Fungsi Kuadrat	 $y = x^2$	 $y = (x - 2)^2$

	Fungsi Dasar	Fungsi Hasil Pergeseran
Fungsi Eksponensial	 $y = 2^x$	 $y = 2^{x-2}$

1. Bandingkan fungsi dasar dan fungsi hasil pergeseran. Perubahan apa yang terjadi? Untuk membantumu menjawab, pilih sebuah nilai y , kemudian bandingkan nilai x pada kedua fungsi.

Fungsi	y	x_1 (Nilai x pada fungsi dasar)	x_2 (Nilai x pada fungsi yang digeser)

2. Tuliskan dugaanmu berdasarkan hasil pengamatan berikut.
- Apa yang terjadi pada fungsi, jika $y = f(x)$ diubah menjadi $y = f(x - h)$?
 - Bagaimana jika nilai h negatif?

3.



Ayo, Berpikir Kritis

Ujilah dugaanmu dengan langkah-langkah berikut.

- Tentukan sebuah fungsi, kemudian gambarkan grafiknya.
- Tentukan besar dan arah pergeseran yang akan kamu lakukan.
- Tentukan fungsi hasil pergeseran.
- Gambarkan grafik fungsi hasil pergeseran.
- Amati kedua grafik. Apakah dugaanmu benar?



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menjawab pertanyaan nomor 1–3 dengan memanfaatkan tautan *GeoGebra* yang sama pada Eksplorasi 3.1.

- Lakukan langkah yang sama seperti saat menjawab pertanyaan nomor 1–3 pada Eksplorasi 3.1. Kali ini, ubah nilai h dengan memastikan nilai $k = 0$.
- Geser-geserlah tombol yang mengubah nilai h .
- Perhatikan grafik dan persamaan fungsi hasil pergeseran.
- Ulangi untuk fungsi dasar yang berbeda.

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut:

- Apa dugaanmu mengenai pengaruh nilai h ?
- Apakah nilai h memberi pengaruh yang sama terhadap ketiga fungsi dasar?
- Apa yang terjadi jika h bernilai negatif?

Setelah menjawab pertanyaan nomor 1–3 pada Eksplorasi 3.2, kamu tentu melihat bahwa fungsi dapat digeser sehingga menghasilkan fungsi lain. Fungsi $y = f(x)$

- jika digeser 3 satuan ke kanan menghasilkan $y = f(x - 3)$,
- jika digeser 1 satuan ke kanan menghasilkan $y = f(x - 1)$,
- jika digeser 1 satuan ke kiri menghasilkan $y = f(x + 1)$.

Dapat dikatakan:

Jika fungsi $y = f(x)$ digeser sejauh h satuan ke kanan maka fungsi tersebut berubah menjadi $y = f(x - h)$.

3. Pergeseran Horizontal dan Vertikal

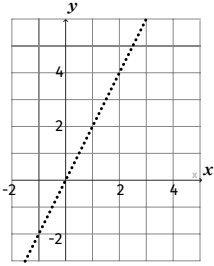
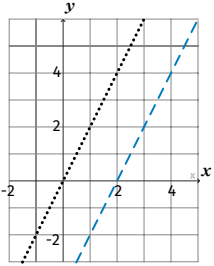
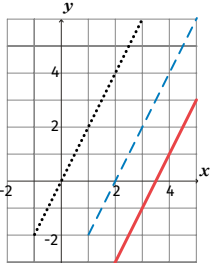
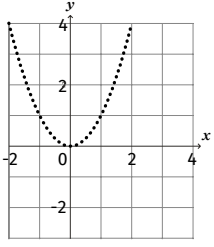
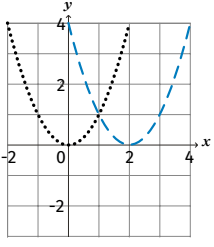
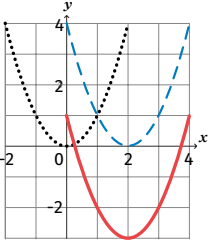


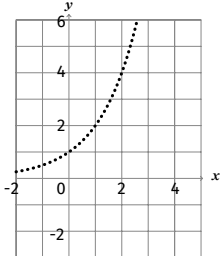
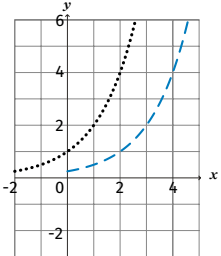
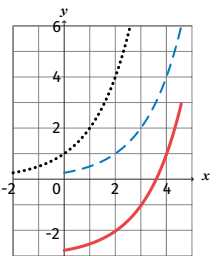
Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 3.3

Suatu fungsi dapat mengalami pergeseran secara horizontal dan vertikal. Pada kegiatan ini, kamu dapat memandang pergeseran berlangsung secara horizontal terlebih dahulu, kemudian secara vertikal. Amati **Tabel 3.3** yang berisi fungsi dasar dan tuliskan persamaan fungsi hasil pergeseran di bawah masing-masing grafik.

Tabel 3.3 Fungsi Hasil Pergeseran Secara Horizontal dan Vertikal

	Fungsi Dasar	Pergeseran Horizontal Sejauh 2 Satuan ke Kanan	Pergeseran Vertikal Sejauh 3 Satuan ke Bawah
Fungsi Linear	 $y = 2x$	 _____	 _____
Fungsi Kuadrat	 $y = x^2$	 _____	 _____

	Fungsi Dasar	Pergeseran Horizontal Sejauh 2 Satuan ke Kanan	Pergeseran Vertikal Sejauh 3 Satuan ke Bawah
Fungsi Eksponensial	 $y = 2^x$	 _____	 _____



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menentukan persamaan fungsi hasil pergeseran pada setiap grafik di Tabel 3.3 dengan memanfaatkan tautan GeoGebra yang digunakan pada Eksplorasi 3.1.

- Lakukan hal yang sama seperti saat menjawab pertanyaan nomor 1–3 pada Eksplorasi 3.1. Hanya saja, kali ini, kamu mengubah nilai h dan nilai k . Kamu juga bisa mengubah posisi titik P .

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Apa hubungan antara nilai h dan k dengan posisi titik P ?
2. Apa yang terjadi dengan grafik dan persamaan fungsi hasil pergeseran?
3. Apa dugaanmu mengenai pengaruh nilai h dan k ?
 - Ulangi langkah yang sama menggunakan fungsi dasar yang berbeda, kemudian jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.
4. Apakah nilai h dan k memberi pengaruh yang sama terhadap ketiga fungsi dasar?
5. Apa yang terjadi jika salah satu nilai h atau k negatif?
6. Apa yang terjadi jika kedua nilai h dan k negatif?

7.



Ayo, Berpikir Kritis

Pada Tabel 3.3, fungsi digeser secara horizontal, kemudian vertikal. Apakah mungkin fungsi dapat digeser secara vertikal, kemudian horizontal? Tentukan sebuah fungsi, lalu gambarkan grafiknya.

8. Bandingkan hasil kedua urutan pergeseran tersebut. Apakah urutannya penting?

Setelah menjawab pertanyaan nomor 1–8 kamu tentu melihat bahwa pergeseran vertikal dan pergeseran horizontal dapat digabungkan. Dapat dikatakan:

Jika fungsi $y = f(x)$ digeser sejauh h satuan pada arah horizontal dan k satuan ke vertikal maka fungsi tersebut berubah menjadi $y = f(x - h) + k$.

Catatan: Sesuai dengan perjanjian tanda pada bidang koordinat, maka untuk nilai h dan k :

- Tanda + menyatakan pergeseran ke kanan atau ke atas.
- Tanda - menyatakan pergeseran ke kiri atau ke bawah.

Setelah melakukan **Eksplorasi 3.1** sampai **3.3**, kamu telah memahami bagaimana cara menggeser fungsi dari sebuah fungsi dasar. Pergeseran sering juga disebut **translasi**. Pergeseran dapat dilakukan secara vertikal maupun secara horizontal. Pergeseran merupakan salah satu bentuk transformasi.

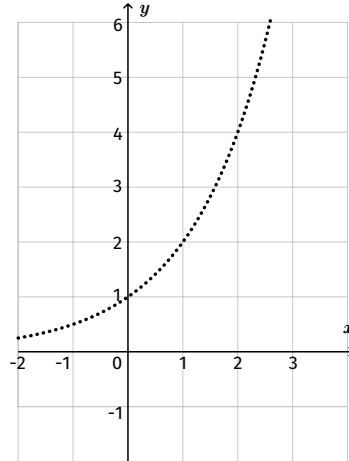
Latihan 3.1

Kerjakan soal-soal berikut.

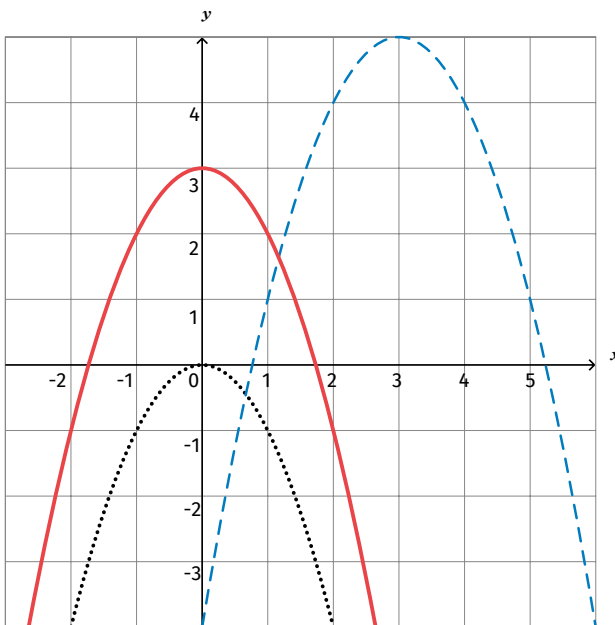
1. Tentukan fungsi yang dihasilkan jika fungsi $y = x^2$ digeser sejauh:
 - a. 5 satuan ke bawah.
 - b. 3 satuan ke kanan.
 - c. 3 satuan ke kanan dan 5 satuan ke bawah.

2. Diberikan grafik fungsi $y = 2^x$. Pada sistem koordinat yang sama, gambarkan

- grafik fungsi $y = 2^{x+1}$
- grafik fungsi $y = 2^x = 3$
- grafik fungsi $y = 2^{x+1} - 3$



3. Diberikan grafik fungsi $y = x^2$ dan dua buah fungsi hasil pergeserannya. Tentukan masing-masing fungsi hasil pergeseran.



- Sebuah fungsi $y = (x + 1)^2$ digeser menghasilkan fungsi $y = x^2 + 6x + 7$. Tentukan pergeseran yang dilakukan.
- Sebuah fungsi digeser sejauh 2 satuan ke kiri dan 1 satuan ke atas menghasilkan fungsi $y = 0,5^{x-1} + 3$. Tentukan fungsi dasarnya (sebelum digeser).

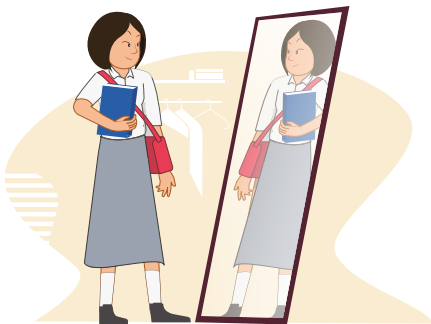


Ayo, Berefleksi

Setelah mempelajari pergeseran, lakukan refleksi berikut. Apakah kamu menjawab **ya** untuk semua pertanyaan berikut? Jika ada pertanyaan yang kamu jawab **tidak**, diskusikan dengan gurumu.

1. Jika saya diberi sebuah fungsi dan grafiknya, serta diminta menggeser fungsi tersebut pada besar dan arah tertentu, apakah saya dapat menemukan fungsi hasil pergeserannya?
2. Jika saya diberi sebuah fungsi dalam bentuk aljabar dan grafiknya, serta grafik hasil pergeseran dari fungsi tersebut, dapatkah saya menentukan fungsi hasil pergeseran?
3. Jika saya diberi sebuah fungsi hasil pergeseran serta besar dan arah pergeserannya, dapatkah saya menentukan fungsi dasarnya?

B. Pencerminan



Gambar 3.2 Gambar Orang Becermin

Setelah mempelajari pergeseran, transformasi berikut yang akan dipelajari adalah pencerminan. Ingatlah saat kamu berdiri di depan cermin. Bayangan yang dihasilkan berjarak sama dari cermin. Jika kamu berdiri dekat dengan cermin maka bayanganmu juga dekat dengan cermin. Sebaliknya, jika kamu berdiri jauh dari cermin maka bayanganmu juga jauh dari cermin. Selain itu, bayanganmu juga

bersifat simetris sehingga tangan kiri tampak sebagai tangan kanan, demikian juga sebaliknya.

Bagaimana memanfaatkan sifat cermin ini untuk mengubah satu fungsi menjadi fungsi lain? Apakah fungsi juga dapat dicerminkan? Apa yang menjadi cerminnya? Untuk memahaminya, lakukan **Eksplorasi 3.4** berikut.

1. Pencerminkan terhadap Sumbu- x

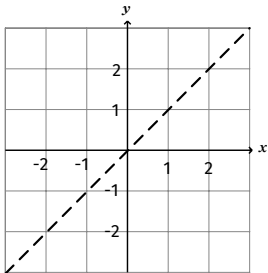
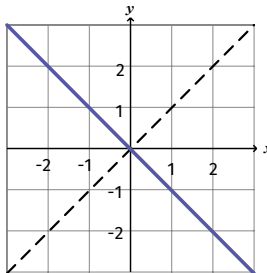
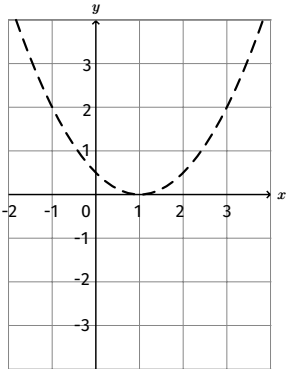
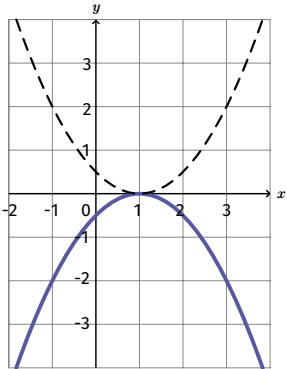


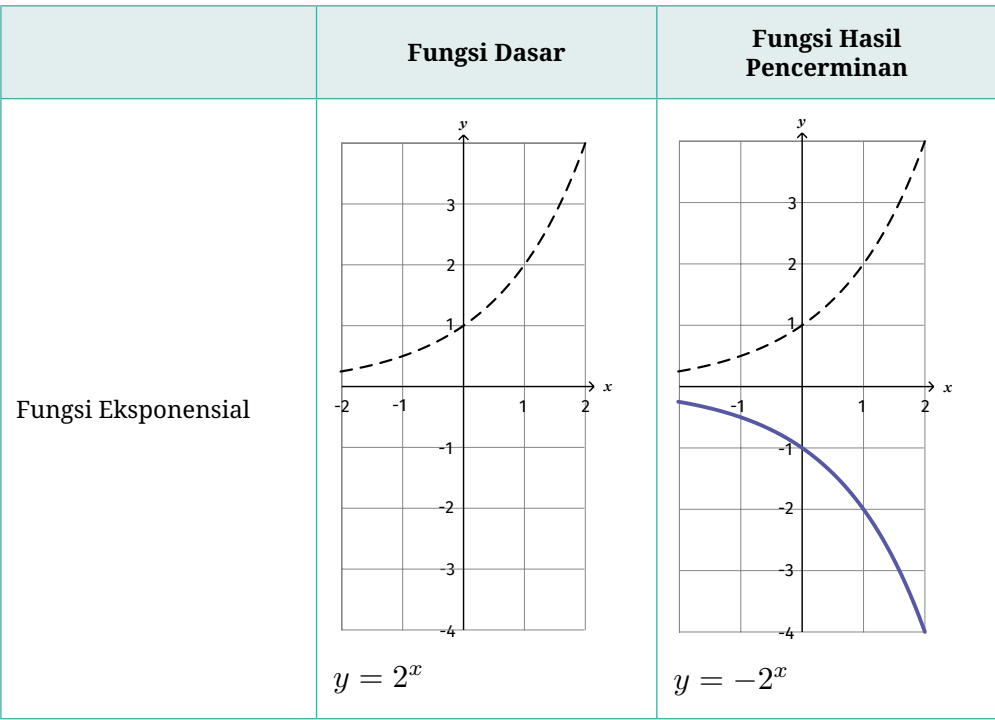
Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 3.4

Dalam eksplorasi ini kamu akan mengamati tiga fungsi pada **Tabel 3.4**, kemudian jawablah pertanyaan-pertanyaan yang menyertainya.

Tabel 3.4 Pencerminkan terhadap Sumbu- x

	Fungsi Dasar	Fungsi Hasil Pencerminkan
Fungsi Linear	 $y = x$	 $y = -x$
Fungsi Kuadrat	 $y = 0,5(x - 1)^2$	 $y = -0,5(x - 1)^2$



1. Bandingkan fungsi dasar dan fungsi hasil pencerminan. Perubahan apa yang terjadi? Untuk membantumu menjawab, pilih sebuah nilai x , kemudian bandingkan nilai y pada kedua fungsi.

Fungsi	x	y_1 (Nilai y pada fungsi dasar)	y_2 (Nilai y pada fungsi hasil pencerminan)

2. Tuliskan dugaanmu, apa yang terjadi pada fungsi jika $y = f(x)$ diubah menjadi $y = -f(x)$?

3.



Ayo, Berpikir Kritis

Ujilah dugaanmu dengan langkah-langkah berikut.

- Tentukan sebuah fungsi, kemudian gambarkan grafiknya.
- Cerminkan fungsi tersebut terhadap sumbu- x .
- Tentukan fungsi hasil pencerminan.
- Gambarkan grafik fungsi hasil pencerminan.
- Amati kedua grafik. Apakah dugaanmu benar?



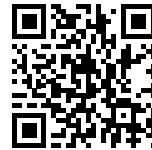
Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menjawab pertanyaan nomor 1-3 dengan menggunakan aplikasi *GeoGebra*.

- Klik tautan atau pindai kode respons cepat berikut.
- Pilih salah satu fungsi dasar (klik kotak yang bersesuaian) dan hasil pencerminannya.

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

- Untuk pencerminan terhadap sumbu- x , kotak manakah yang perlu kalian pilih? Berapakah nilai p atau q yang sesuai?
- Perhatikan grafik dan bentuk aljabar dari fungsi hasil pencerminan. Apa dugaanmu mengenai fungsi hasil pencerminan terhadap sumbu $-x$?
- Ulangi untuk fungsi dasar yang berbeda. Apakah dugaanmu berlaku untuk fungsi dasar yang lain?



Pencerminan

<https://bukupusbuk.id/s/6rpomj>

Setelah menjawab pertanyaan nomor 1-3 pada **Eksplorasi 3.4** kamu dapat melihat bahwa:

Jika fungsi $y = f(x)$ dicerminkan terhadap sumbu- x maka fungsi tersebut berubah menjadi $y = -f(x)$.

2. Pencerminan terhadap Sumbu-y

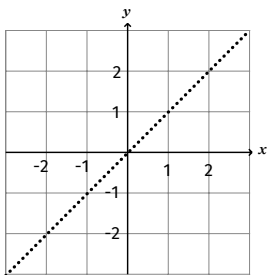
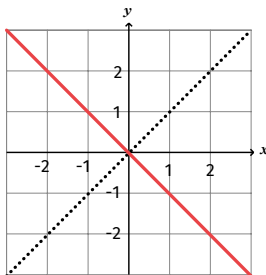
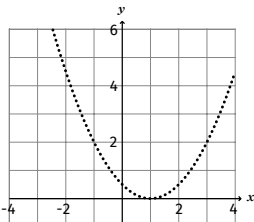
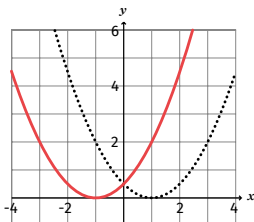
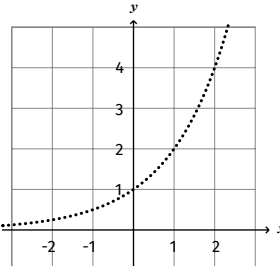
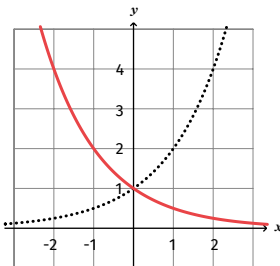


Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 3.5

Dalam eksplorasi ini kamu akan mengamati tiga fungsi pada Tabel 3.5, kemudian jawablah pertanyaan-pertanyaan yang menyertainya.

Tabel 3.5 Pencerminan terhadap Sumbu-y

	Fungsi Dasar	Fungsi Hasil Pencerminan
Fungsi Linear	 $y = x$	 $y = -x$
Fungsi Kuadrat	 $y = 0,5(x - 1)^2$	 $y = 0,5(-x - 1)^2$
Fungsi Eksponensial	 $y = 2^x$	 $y = 2^{-x}$

1. Bandingkan fungsi dasar dan fungsi hasil pencerminan. Perubahan apa yang terjadi? Untuk membantumu menjawab, pilih sebuah nilai y , kemudian bandingkan nilai x pada kedua fungsi.

Fungsi	y	x_1 (Nilai x pada fungsi dasar)	x_2 (Nilai x pada fungsi hasil pencerminan)

3. Tuliskan dugaanmu, apa yang terjadi pada fungsi jika $y = f(x)$ diubah menjadi $y = f(-x)$?

4.



Ayo, Berpikir Kritis

Ujilah dugaanmu dengan langkah-langkah berikut.

- a. Tentukan sebuah fungsi, kemudian gambarkan grafiknya.
- b. Cerminkan fungsi tersebut terhadap sumbu- y .
- c. Tentukan fungsi hasil pencerminan.
- d. Gambarkan grafik fungsi hasil pencerminan.
- e. Amati kedua grafik. Apakah dugaanmu benar?



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menjawab pertanyaan 1–3 dengan memanfaatkan tautan *GeoGebra* yang sama pada **Eksplorasi 3.4**.

- Pilih salah satu fungsi dasar (klik kotak yang bersesuaian) dan hasil pencerminannya.

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

- a. Untuk pencerminan terhadap sumbu- y , kotak manakah yang perlu kalian pilih? Berapakah nilai p atau q yang sesuai?
- b. Perhatikan grafik dan bentuk aljabar dari fungsi hasil pencerminan. Apa dugaanmu mengenai fungsi hasil pencerminan terhadap sumbu- y ?

- c. Ulangi untuk fungsi dasar yang berbeda. Apakah dugaanmu berlaku untuk fungsi dasar yang lain?

Setelah menjawab pertanyaan nomor 1–3 kamu dapat melihat bahwa:

Jika fungsi $y = f(x)$ dicerminkan terhadap sumbu- y maka fungsi tersebut berubah menjadi $y = f(-x)$.

3. Pencerminan terhadap Garis yang Sejajar Sumbu Koordinat



Ayo, Bereksplorasi

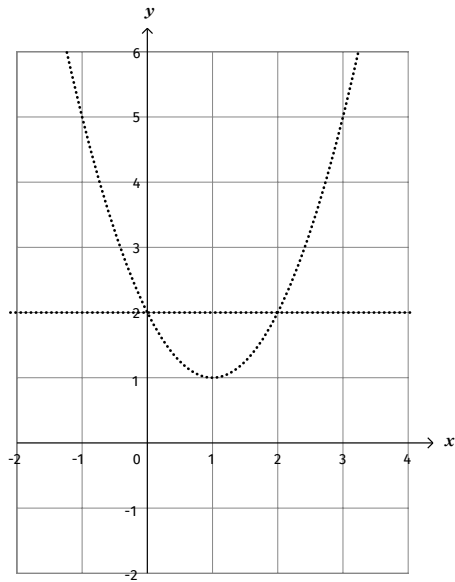
Eksplorasi 3.6

Fungsi juga dapat dicerminkan terhadap garis yang sejajar dengan sumbu koordinat. Pencerminan yang demikian dapat dipandang sebagai gabungan dari pergeseran dan pencerminan terhadap sumbu koordinat. Lakukan langkah-langkah berikut.

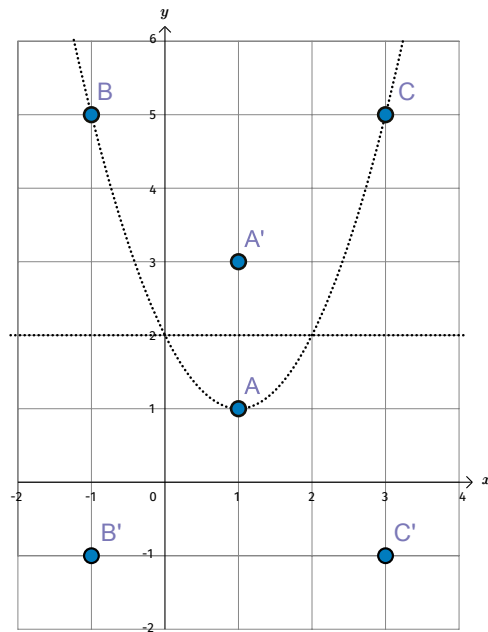
- Lakukan pergeseran fungsi dan garis cermin secara bersamaan sehingga garis cermin berhimpit dengan sumbu koordinat.
- Lakukan pencerminan fungsi terhadap sumbu koordinat.
- Lakukan pergeseran kembali fungsi hasil pencerminan ke posisi awal. Hati-hati saat menentukan apakah pergeserannya searah atau berlawanan arah dengan pergeseran awal.

Tinjaulah fungsi $y = (x - 1)^2 + 1$. Fungsi ini akan dicerminkan terhadap garis $y = 2$. Lakukan langkah-langkah berikut.

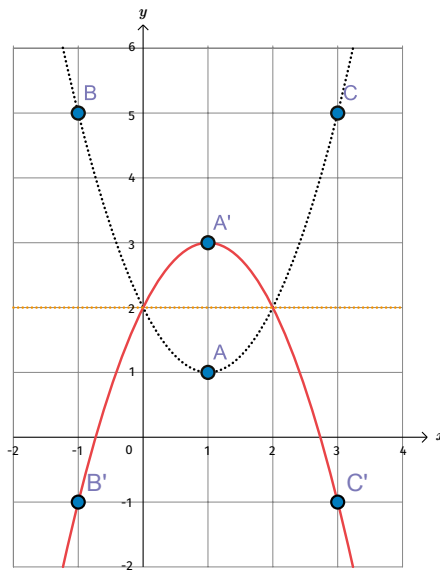
- Gambarlah grafik fungsi $y = (x - 1)^2 + 1$ dan garis $y = 2$



- **Cara 1:**
 - Pilihlah tiga titik pada grafik fungsi.
 - Tentukan bayangan dari masing-masing titik tersebut jika dicerminkan terhadap garis $y = 2$.



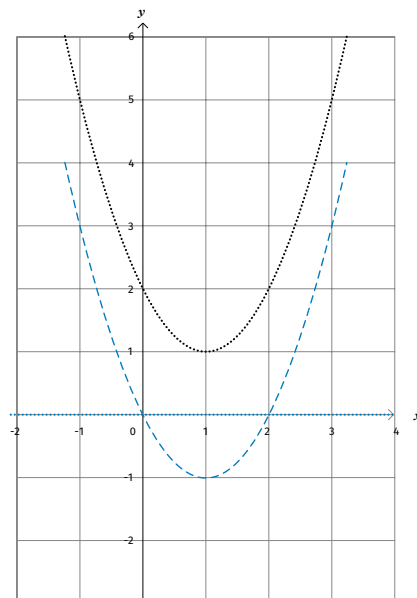
- c. Tentukan persamaan fungsi yang melalui tiga titik tersebut.



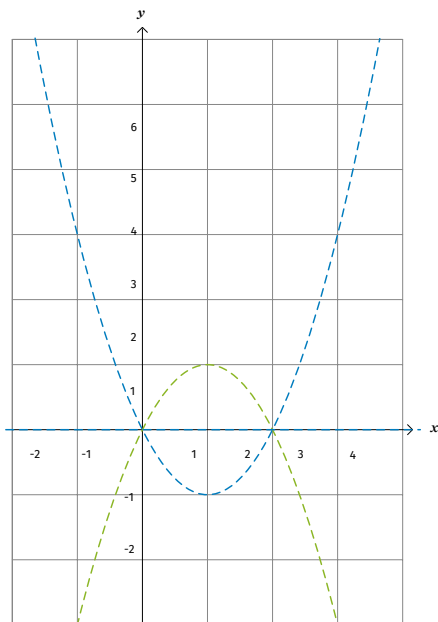
Petunjuk

Fungsi kuadrat memiliki bentuk umum $y = ax^2 + bx + c$. Substitusi setiap pasang nilai (x, y) untuk mendapatkan tiga buah persamaan linear. Selesaikan sistem persamaan linear tersebut untuk mendapatkan fungsi kuadrat yang baru.

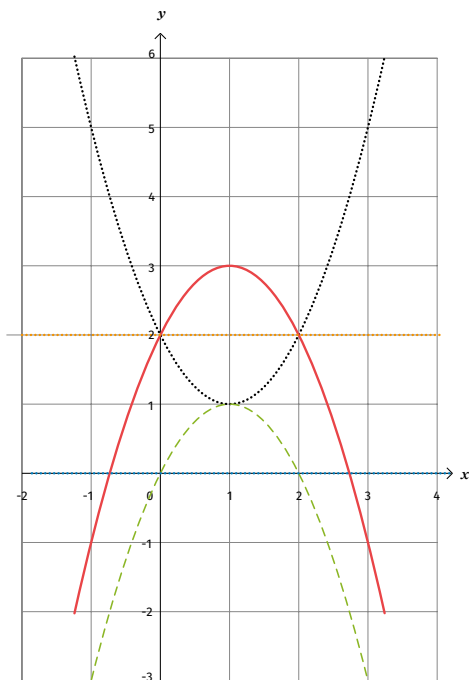
- Cara 2:
 - a. Lakukan pergeseran fungsi dan garis cermin secara bersamaan sehingga garis cermin berhimpit dengan sumbu koordinat. Misalkan pergeseran ini sejauh q satuan ke bawah. Tuliskan fungsi yang dihasilkan.



- b. Lakukan pencerminan terhadap sumbu- x . Tuliskan fungsi yang dihasilkan.



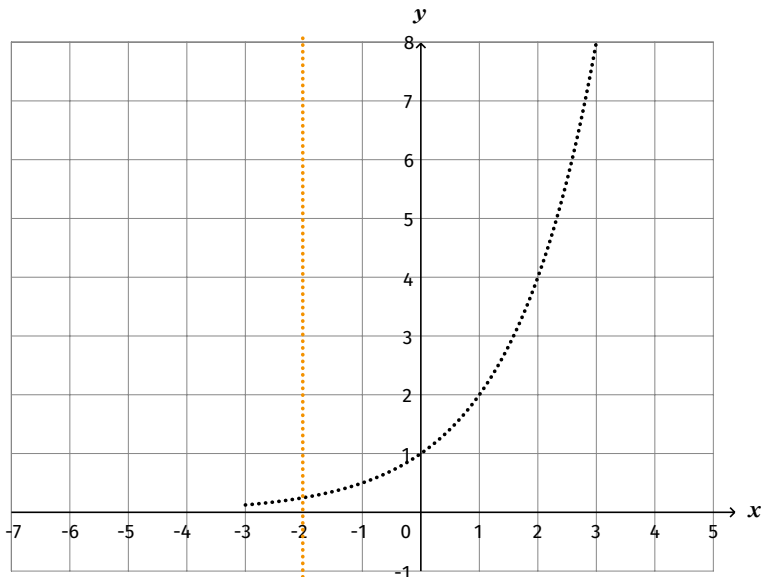
- c. Geser kembali fungsi ke posisi awal, yaitu sejauh q satuan ke atas. Tuliskan fungsi yang dihasilkan.



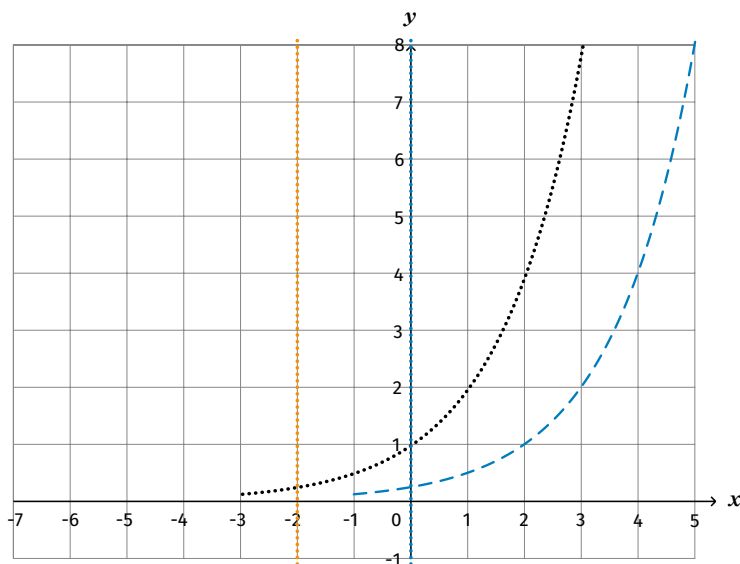
Bandungkan hasil yang kamu dapatkan dari Cara 1 dan Cara 2.

Ulangi untuk fungsi yang dicerminkan terhadap garis $x = p$. Cerminkan fungsi $y = 2^x$ terhadap garis $x = -2$. Lakukan langkah-langkah berikut.

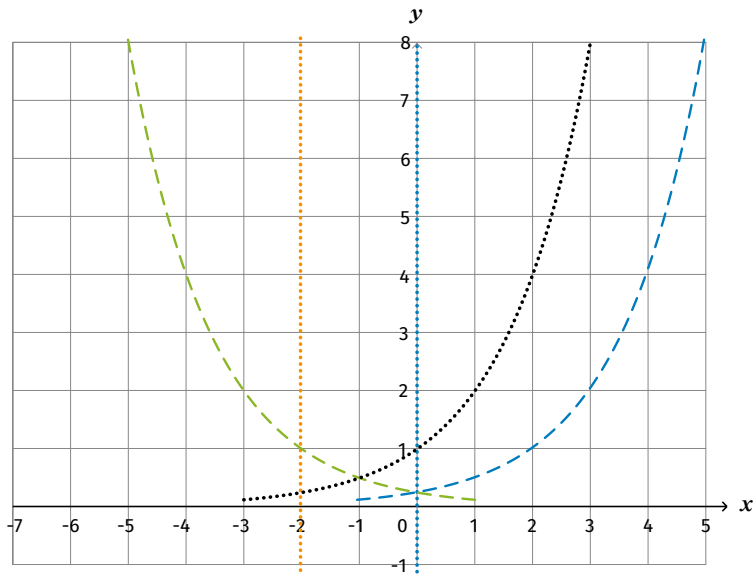
- Gambarlah grafik fungsi $y = 2^x$ dan garis $x = -2$.



- Lakukan pergeseran fungsi dan garis cermin secara bersamaan sehingga garis cermin berhimpit dengan sumbu koordinat. Misalkan pergeseran ini sejauh p satuan ke kanan. Tuliskan fungsi yang dihasilkan.



- Cerminkan fungsi tersebut terhadap sumbu- y .

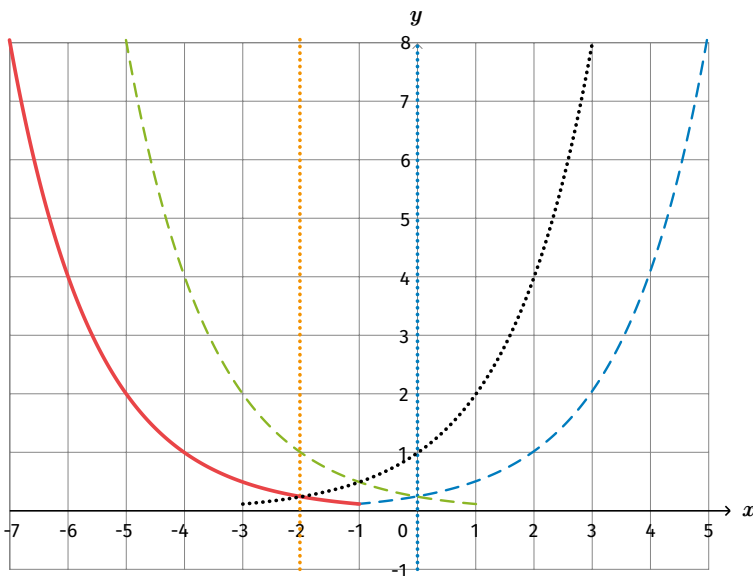


- Lakukan pergeseran fungsi ke posisi awal, yaitu sejauh p satuan ke kiri. Tuliskan fungsi yang dihasilkan.



Petunjuk

Pikirkan, bagaimana pergeseran awal terhadap cermin? Apakah kompensasi ini perlu searah atau berlawanan arah dengan pergeseran awal?



- Yakinkan dirimu:
 - a. Tentukan sebuah titik yang terletak pada fungsi awal $y = 2^x$.
 - b. Cerminkan titik tersebut terhadap garis $x = -2$
 - c. Benarkah hasilnya terletak pada fungsi hasil pencerminan?



Ayo, Berpikir Kreatif

Tentukan fungsi yang akan terjadi jika fungsi $y = f(x)$ dicerminkan terhadap $x = p$

1. Cerminkan fungsi $y = (x - 1)^2 + 1$ terhadap garis $x = -1$.
2. Cerminkan fungsi $y = 2^x$ terhadap garis $y = 1$.



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menggunakan tautan *GeoGebra* yang sama untuk menghasilkan pencerminan fungsi. Hanya saja, kamu terlebih dahulu mencari sendiri hasil pencerminan fungsi terhadap garis yang sejajar sumbu koordinat, tanpa aplikasi. Selanjutnya, gunakan *GeoGebra* untuk membandingkan apakah hasil perhitungannya benar.

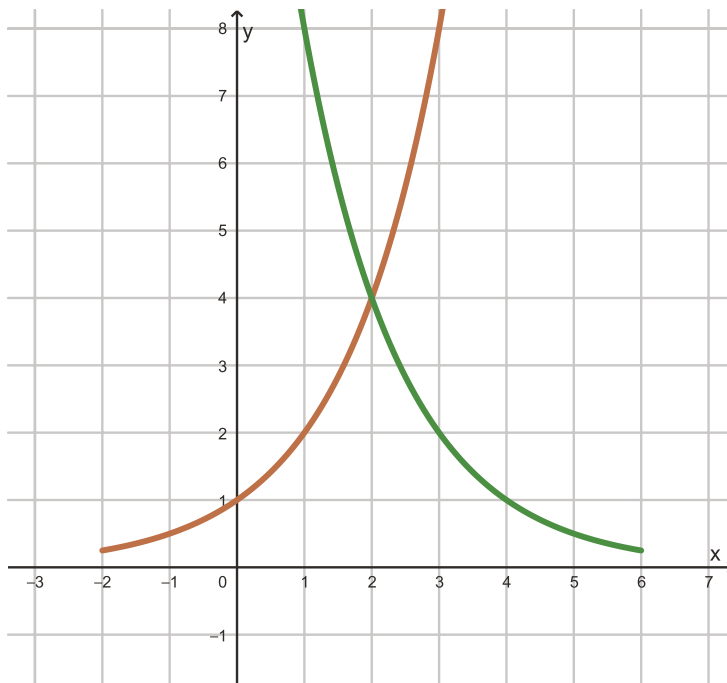
Setelah melakukan **Eksplorasi 3.4** hingga **Eksplorasi 3.6** kamu telah memahami bagaimana mencerminkan fungsi terhadap sumbu koordinat maupun terhadap garis yang sejajar dengan sumbu koordinat. Pencerminan sering juga disebut **refleksi**. Tentunya kata refleksi ini berbeda maknanya dengan refleksi pada akhir bab. Agar tidak rancu, pada buku ini kata yang digunakan adalah pencerminan.

Latihan 3.2

Kerjakan soal-soal berikut.

1. Cerminkan fungsi $y = -x^2 - 3$ terhadap sumbu $-x$.
2. Cerminkan fungsi $y = x^2 + 1$ terhadap sumbu $-y$.
3. Cerminkan fungsi $y = 3x$ terhadap sumbu $-x$
4. Cerminkan fungsi $y = 2^x$ terhadap sumbu y .
5. Cerminkan fungsi $y = x^2$ terhadap garis $y = -1$.

6. Cerminkan fungsi $y = x^2$ terhadap garis $x = 2$.
7. Berikut adalah grafik fungsi dan pencerminannya. Tentukan cermin yang digunakan.



Ayo, Berefleksi

Setelah mempelajari pencerminan, lakukan refleksi berikut. Apakah kamu menjawab **ya** untuk semua pertanyaan berikut? Jika ada pertanyaan yang kamu jawab **tidak**, diskusikan dengan gurumu.

1. Jika saya diberi sebuah fungsi dan grafiknya, serta diminta mencerminkan fungsi tersebut pada salah satu sumbu koordinat, apakah saya dapat menemukan fungsi hasil pencerminannya?
2. Jika saya diberi sebuah fungsi dan grafiknya, serta diminta mencerminkan fungsi tersebut pada salah satu garis yang sejajar dengan sumbu koordinat, apakah saya dapat menemukan fungsi hasil pencerminannya?

C. Peregangan dan Pemampatan



Gambar 3.3 Slinky

Dalam dua subbab terdahulu kamu telah mempelajari pergeseran dan pencerminan. Kali ini kamu akan mempelajari peregangan dan pemampatan. Perhatikan gambar slinki pada **Gambar 3.3**. Slinky memiliki bagian yang meregang dan bagian yang memampat.

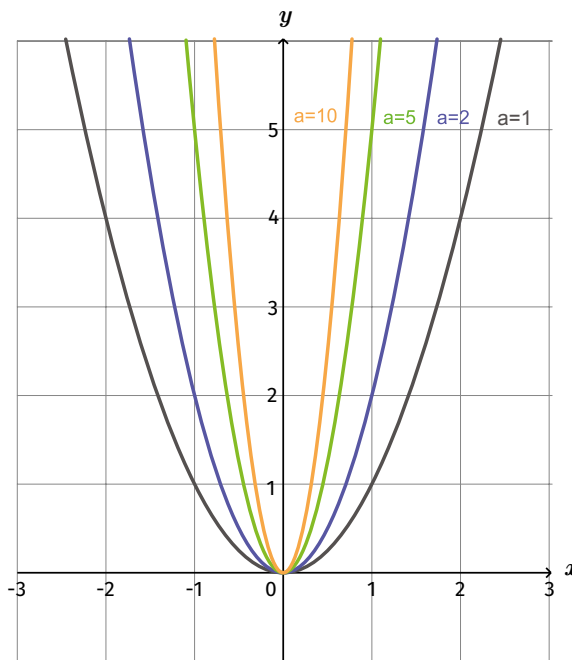
Untuk itu, lakukan **Eksplorasi 3.7** berikut untuk mempelajari terjadinya peregangan dan pemampatan pada fungsi.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 3.7

1. Berikut adalah grafik $y = ax^2$ untuk nilai $a = 1, a = 2, a = 5$, dan $a = 10$.

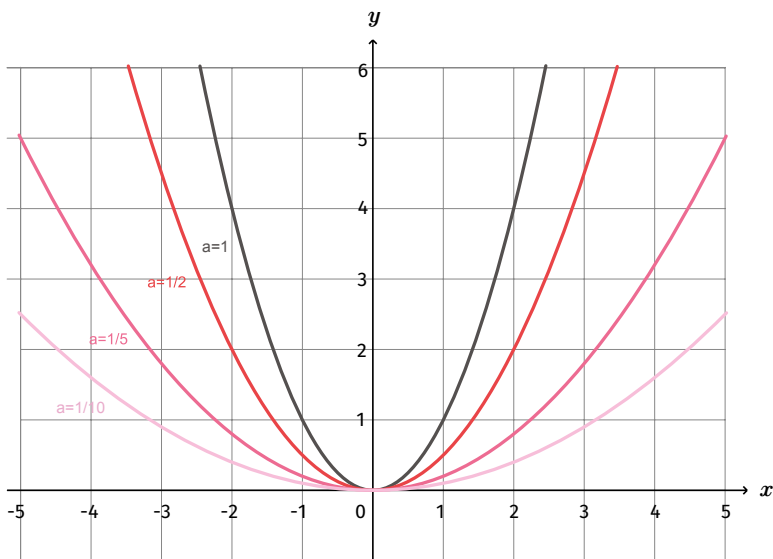


Pilih nilai x dan bandingkan nilai-nilai y untuk fungsi-fungsi tersebut.

Tabel 3.6 Nilai x dan y untuk $y = ax^2$ untuk $a = 1, 2, 5, 10$

x	$y = x^2$	$y = 2x^2$	$y = 5x^2$	$y = 10x^2$
1				
-2				

2. Berikut adalah grafik $y = ax^2$ untuk nilai $a = 1, a = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{5},$ dan $a = \frac{1}{10}$.



Pilih nilai x dan bandingkan nilai-nilai y untuk fungsi-fungsi tersebut.

Tabel 3.7 Nilai x dan y untuk $y = ax^2$ untuk $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$

x	$y = x^2$	$y = \frac{1}{2}x^2$	$y = \frac{1}{5}x^2$	$y = \frac{1}{10}x^2$
1				
-2				

3.

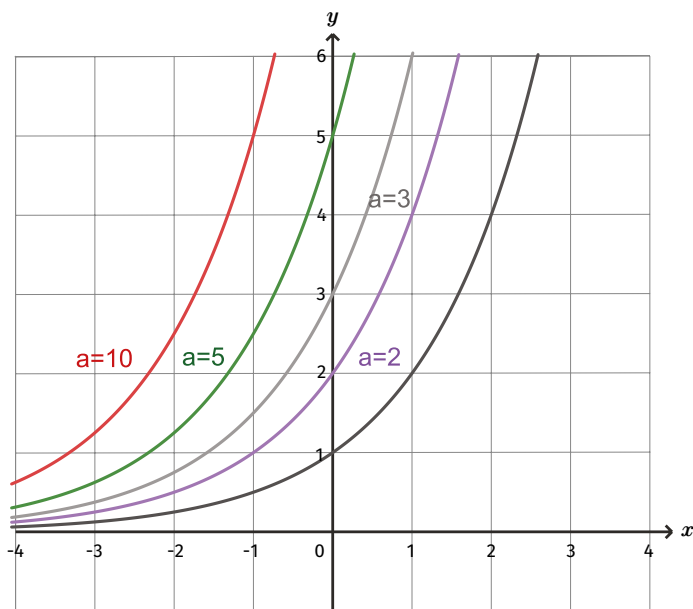


Ayo, Berpikir Kritis

Buatlah dugaan berdasarkan pengamatanmu berikut ini.

- Apakah pengaruh variabel a dalam fungsi $y = ax^2$?
- Apakah yang terjadi jika $a > 1$?
- Apakah yang terjadi jika $0 < a < 1$?

4. Mari amati apa yang terjadi untuk fungsi eksponensial. Berikut grafik untuk fungsi $y = a \cdot 2^x$ untuk nilai $a = 1, a = 2, a = 3, a = 5$, dan $a = 10$.

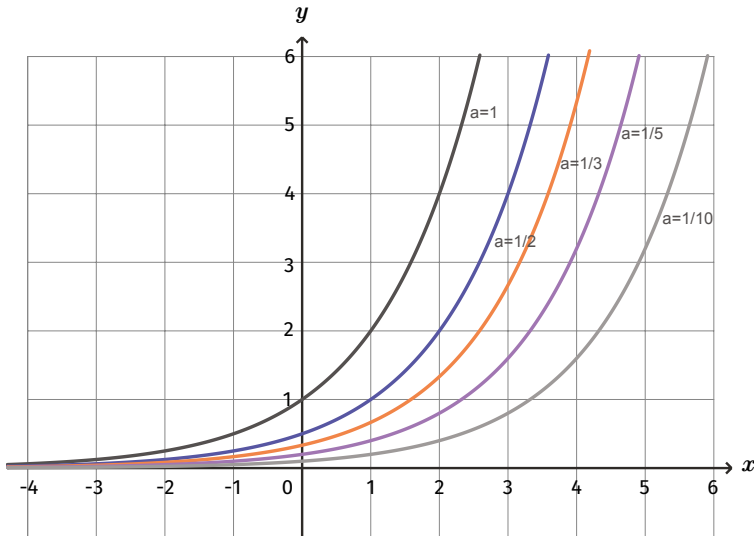


Pilih nilai x dan bandingkan nilai-nilai y untuk fungsi-fungsi tersebut.

Tabel 3.8 Nilai x dan y untuk $y = a \cdot 2^x$ untuk $a = 1, 2, 3, 5, 10$

x	$y = 2^x$	$y = 2 \cdot 2^x$	$y = 3 \cdot 2^x$	$y = 5 \cdot 2^x$	$y = 10 \cdot 2^x$
1					
0					
-1					

5. Berikut grafik untuk fungsi $y = a \cdot 2^x$ untuk nilai $a = 1$, $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{3}$, $a = \frac{1}{5}$, dan $a = \frac{1}{10}$.



Pilih nilai x dan bandingkan nilai-nilai y untuk fungsi-fungsi tersebut.

Tabel 3.9 Nilai x dan y untuk $y = a \cdot 2^x$ untuk $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$

x	$y = 2^x$	$y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$	$y = \frac{1}{3} \cdot 2^x$	$y = \frac{1}{5} \cdot 2^x$	$y = \frac{1}{10} \cdot 2^x$
0					
1					
-1					

6.



Ayo, Berpikir Kritis

Buatlah dugaan berdasarkan pengamatanmu berikut ini.

- Apa pengaruh variabel a dalam fungsi $y = a \cdot 2^x$?
- Apa yang terjadi jika $a > 1$?
- Apa yang terjadi jika $0 < a < 1$?
- Tentukan fungsi yang memiliki nilai $a = 1, a = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{3}, a = \frac{1}{5}$, dan $a = \frac{1}{10}$.
- Apa yang terjadi jika $a < 0$?

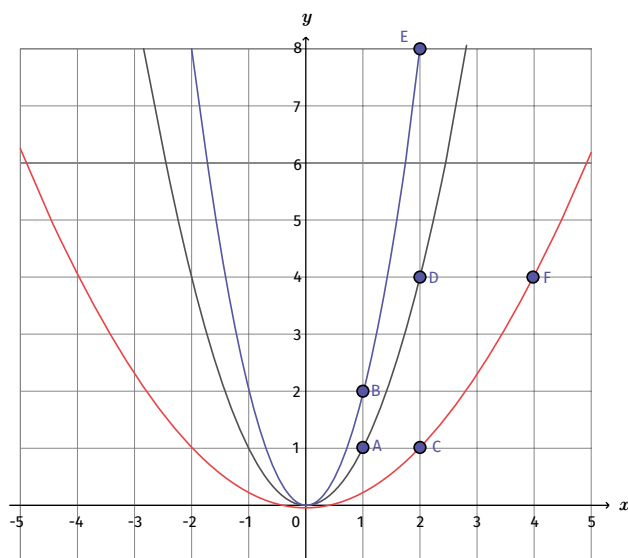
7. Kamu telah mengenal bentuk umum fungsi linear, yaitu $y = mx + c$. Variabel manakah yang berperan untuk melakukan peregangan dan pemampatan? Gambarkan beberapa fungsi untuk melihat pengaruhnya.



Ayo, Berpikir Kreatif

Tentukan fungsi yang akan terjadi jika fungsi $y = f(x)$ ditransformasi menjadi $y = af(x)$

Peregangan dan pemampatan mengubah fungsi secara berbeda dengan pergeseran dan pencerminan. Jika pergeseran dan pencerminan menghasilkan fungsi yang **ukurannya tetap**, peregangan dan pemampatan menghasilkan fungsi yang **ukurannya berbeda**. Peregangan dan pemampatan dapat terjadi secara horizontal maupun vertikal. Untuk lebih memahaminya, amati grafik berikut lalu jawab pertanyaan yang menyertainya.



8. Bandingkan fungsi $y = x^2$ dengan fungsi $y = 2x^2$. Untuk nilai x yang tetap, apa yang terjadi dengan nilai y -nya?

Tabel 3.10 Perbandingan $y = x^2$ dengan $y = 2x^2$

$y = x^2$	$y = 2x^2$
(1,1)	
(2,4)	
(-2,4)	

9. Buatlah dugaan: untuk meregangkan/memampatkan fungsi secara vertikal dengan faktor a , apa yang harus dilakukan terhadap fungsi $y = f(x)$?
 - a. Apa yang terjadi jika $a > 1$?
 - b. Apa yang terjadi jika $0 < a < 1$?
 - c. Apa yang terjadi jika $a < 0$?
10. Bandingkan fungsi $y = x^2$ dengan fungsi $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$. Untuk nilai x yang tetap, apa yang terjadi dengan nilai y -nya?

Tabel 3.11 Perbandingan $y = x^2$ dengan $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$y = x^2$	$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$
(1,1)	
(2,4)	
(-2,4)	

11. Buatlah dugaan: untuk meregangkan/memampatkan fungsi secara vertikal dengan faktor b , apa yang harus dilakukan terhadap fungsi $y = f(x)$?
 - a. Apa yang terjadi jika $b > 1$?
 - b. Apa yang terjadi jika $0 < b < 1$?
 - c. Apa yang terjadi jika $b < 0$?

12. Ujilah dugaanmu dengan fungsi yang lain.

- a. Uji dengan fungsi eksponensial
- b. Uji dengan fungsi linear

Peregangan dan pemampatan dapat terjadi pada arah horizontal maupun vertikal.

- Peregangan/pemampatan vertikal dengan faktor a didapat dengan mengubah fungsi $y = f(x)$ menjadi $y = af(x)$.
 - Untuk $a > 1$ terjadi peregangan vertikal
 - Untuk $0 < a < 1$ terjadi pemampatan vertikal
 - Untuk $a < 0$ terjadi pencerminan dan peregangan/pemampatan
- Peregangan/pemampatan horizontal dengan faktor b didapat dengan mengubah fungsi $y = f(x)$ menjadi $y = f\left(\frac{x}{b}\right)$.
 - Untuk $b > 1$ terjadi peregangan horizontal
 - Untuk $0 < b < 1$ terjadi pemampatan horizontal
 - Untuk $b < 0$ terjadi pencerminan dan peregangan/pemampatan

Latihan 3.3

Kerjakan soal-soal berikut.

1. Tentukan fungsi yang dihasilkan jika fungsi $y = x^2$ mengalami transformasi berikut secara berturut-turut:
 - a. Pencerminan terhadap sumbu $-x$.
 - b. Peregangan vertikal dengan faktor pengali 2.
 - c. Pergeseran sejauh $(-2, 1)$
2. Fungsi mana sajakah yang merupakan peregangan dari $y = (x - 1)^2$? Tentukan apakah terjadi peregangan horizontal atau vertikal, dan berapa faktor pengalinya. (Jawaban bisa lebih dari satu.)
 - a. $y = (2x - 1)^2$
 - b. $y = 2(x - 1)^2$
 - c. $y = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$
 - d. $y = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$

3. Bandingkan fungsi $y = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$ dengan $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ untuk nilai x yang sama, fungsi manakah yang memiliki nilai y lebih besar?
4. Gunakan peregangan/pemampatan untuk menggambarkan grafik fungsi $y = 2^{2x}$
5. Bandingkan fungsi $y = 2^{2x}$ dengan $y = 2^{\frac{x}{2}}$ untuk nilai x yang sama. Fungsi manakah yang memiliki nilai y lebih besar? Apakah jawabannya sama untuk seluruh domain? Jika berbeda, di manakah batasnya?

Setelah mempelajari subbab A–C, kamu telah belajar tiga jenis transformasi fungsi. Selanjutnya, kamu akan belajar menggunakan transformasi fungsi untuk membuat model matematika.

Transformasi	$y = f(x)$ Berubah Menjadi
Pergeseran sejauh (h, k)	$y = f(x - h) + k$
Pencerminan terhadap sumbu $-x$	$y = -f(x)$
Pencerminan terhadap sumbu $-y$	$y = f(-x)$
Peregangan/pemampatan vertikal	$y = af(x)$
Peregangan/pemampatan horizontal	$y = f\left(\frac{x}{b}\right)$



Ayo, Berefleksi

Setelah mempelajari Peregangan dan Pemampatan, lakukan refleksi berikut. Apakah kamu menjawab **ya** untuk semua pertanyaan berikut? Jika ada pertanyaan yang kamu jawab **tidak**, diskusikan dengan gurumu.

1. Jika saya diberi sebuah fungsi dan grafiknya, serta diminta melakukan peregangan, apakah saya dapat menemukan fungsi hasilnya?
2. Jika saya diberi sebuah fungsi dan grafiknya, serta diminta melakukan pemampatan, apakah saya dapat menemukan fungsi hasilnya?
3. Jika saya diberi sebuah fungsi dan grafiknya, diberikan fungsi hasil pemampatan/peregangan, dapatkah saya menemukan peregangan/pemampatan yang dimaksud?

D. Pemodelan

Kamu telah mempelajari tiga jenis transformasi fungsi, yaitu pergeseran, pencerminan, dan peregangan/pemampatan. Kamu juga telah mengetahui bahwa transformasi-transformasi tersebut dapat digabungkan. Pada subbab ini, kamu akan belajar menggunakan fungsi dan transformasinya untuk memodelkan situasi dunia nyata.

Sebelum memodelkan, mari ingat lagi jenis-jenis transformasi terhadap fungsi yang telah kamu pelajari. Jika $y = f(x)$ diubah menjadi $y = a \cdot f\left(\frac{x-h}{b}\right) + k$, apa peran setiap konstanta?

Konstanta	Transformasi	Keterangan
a	Peregangan / pemampatan vertikal	$a > 1$ peregangan vertikal dengan faktor a $0 < a < 1$ pemampatan vertikal dengan faktor a $a < 0$ pencerminan terhadap sumbu- x (dengan peregangan/pemampatan)
b	Peregangan / pemampatan horizontal	$b > 1$ peregangan horizontal dengan faktor b $0 < b < 1$ pemampatan horizontal dengan faktor b . $b < 0$ pencerminan terhadap sumbu- y (dengan peregangan/pemampatan)
h	Pergeseran horizontal	$h > 0$ pergeseran ke kanan $h < 0$ pergeseran ke kiri
k	Pergeseran vertikal	$k > 0$ pergeseran ke atas $k < 0$ pergeseran ke bawah

Bagaimana cara membuat pemodelan matematika? Untuk memahaminya, lakukan **Eksplorasi 3.8**.



Eksplorasi 3.8

Untuk mempelajari apa dan bagaimana menggunakan transformasi fungsi untuk membuat model matematika, cobalah lakukan eksplorasi berikut.

Kinan dan Angga melempar bola. Bolanya diberi sensor dan hasilnya dituliskan dalam tabel berikut.

Tabel 3.12 Ketinggian Bola

Waktu (detik)	0	0,5	1	1,5	2
Ketinggian (m)	0	3,5	5	3,8	0

1. Pertama-tama, gambarkan titik-titik tersebut pada bidang koordinat dengan sumbu- x menyatakan waktu (dalam detik) dan sumbu- y menunjukkan ketinggian (dalam meter).

2.



Ayo, Berpikir Kritis

Tentukan apakah titik-titik tersebut menunjukkan fungsi linear/fungsi kuadrat/fungsi eksponensial.

- a. Apakah ketinggian bola nilainya naik terus? Turun terus? Naik turun? Ada berapa kali perubahan arah?
 - b. Fungsi dasar apa yang memiliki sifat demikian?
3. Gambarkan grafik fungsi sesuai fungsi dasar yang kamu pilih.
 4. Pencerminkan
 - a. Adakah pencerminan yang dibutuhkan?
 - b. Jika ya, tentukan fungsi hasil pencerminan dan gambarkan grafiknya.
 5. Pergeseran
 - a. Apakah dibutuhkan pergeseran sehingga grafiknya melalui titik-titik tersebut?
 - b. Jika ya, tentukan fungsi hasil pergeseran dan gambarkan grafiknya.
 - c. Bagaimana kamu menentukan berapa pergeserannya?

6. Peregangan/Pemampatan

- Adakah peregangan/pemampatan yang dibutuhkan?
- Jika ya, tentukan fungsi hasil peregangan/pemampatan dan grafiknya.
-



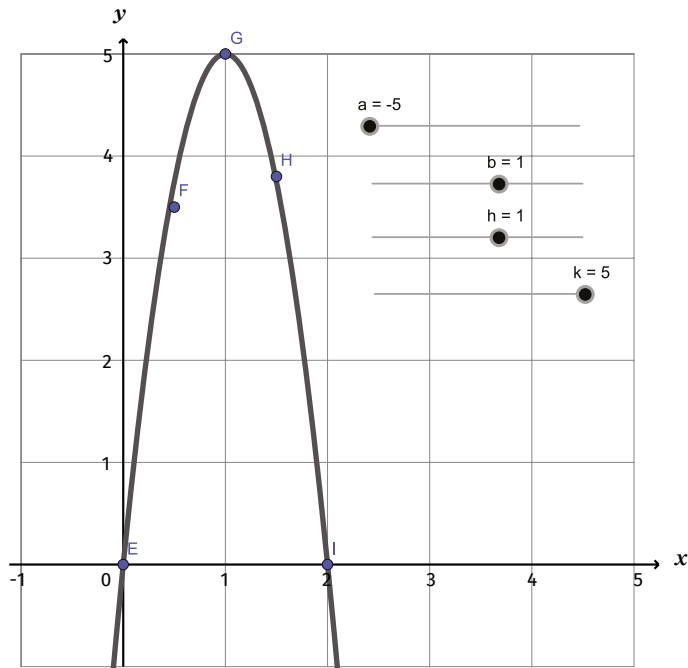
Ayo, Berpikir Kritis

Bagaimana kamu menentukan berapa peregangan/pemampatannya?

Petunjuk: Sadari bahwa grafik yang dihasilkan belum tentu melalui titik-titik yang dimaksud. Hal yang perlu diperhatikan adalah kesesuaian bentuk grafik.

- Jika menurutmu grafiknya masih perlu diperbaiki, ubah fungsi hingga kamu memperoleh hasil yang sesuai.
- Apakah fungsi yang dihasilkan melalui titik-titik yang diminta?
- Tuliskan model matematika yang kamu dapatkan.

Jika kamu perhatikan, bola yang dilempar ke atas, bergerak naik, lalu turun. Sifat ini mirip dengan sifat fungsi kuadrat yang koefisien x^2 bernilai negatif. Itu sebabnya model matematika yang digunakan adalah fungsi kuadrat yang dicerminkan terhadap sumbu $-x$. Kamu tentu ingat bahwa fungsi kuadrat yang dituliskan dalam bentuk $y = a(x - h)^2 + k$ memiliki titik maksimum/minimum di (h, k) sehingga posisi bola yang tertinggi dapat digunakan untuk menentukan pergeseran fungsi. Selanjutnya, peregangan/pemampatan dapat ditentukan dengan mencoba-coba. Jika kamu belum puas dengan hasilnya, kamu dapat mengubah-ubah konstanta-konstanta yang ada.



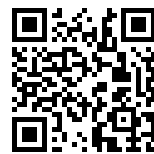
Model matematika yang dihasilkan adalah $y = -5(x - 1)^2 + 5$ atau $y = -5x^2 + 10x$.

Perhatikan bahwa tidak semua titik terletak pada kurva. Namun, secara umum, kurva ini mendekati titik-titik yang ada. Ingatlah bahwa dalam banyak kasus, model matematika tidak tepat sama dengan situasi dunia nyata. Meskipun demikian, model tersebut cukup mendekati sehingga dapat mewakili situasi tersebut.



Ayo, Menggunakan Teknologi

Penggunaan teknologi sangat menolong dalam melakukan pemodelan. Gunakan tautan *GeoGebra* atau kode respons cepat berikut dan ikuti langkah-langkah yang diberikan untuk membuat pemodelan matematika dari data yang ada.



Transformasi Fungsi

<https://bukupusbuk.id/s/zorraf>

Latihan 3.4

Kerjakan soal-soal berikut.

1. Di sebuah laboratorium Fisika diadakan percobaan tentang sebuah zat radioaktif. Setiap hari dilakukan penimbangan bahan radioaktif tersebut dan hasilnya ditampilkan pada tabel berikut.

Waktu (hari)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Massa (mg)	10,0	8,1	6,1	5,0	3,9	3,2	2,7	2,1	1,5	1,3	0,9

- a. Pada bidang koordinat,
- Gunakan waktu sebagai sumbu- x dan massa sebagai sumbu- y . Mengapa?
 - Pindahkan data tabel ke dalam bidang koordinat.

b.

**Ayo, Berpikir Kritis**

Amati data

- Apakah massa radioaktif nilainya naik atau turun? Apakah perubahannya konsisten pada satu arah atau mengalami perubahan arah?
- Fungsi apa yang sifatnya demikian?
- Selain itu, kamu mungkin sudah mengetahui bahwa peluruhan zat radioaktif mengikuti fungsi eksponensial.

c.

**Ayo, Berpikir Kreatif**

Salah satu data tentang zat radioaktif adalah waktu paruh, artinya waktu yang dibutuhkan zat radioaktif itu untuk meluruh hingga tinggal separuhnya.

- Hal ini juga berarti bahwa fungsi eksponensial $y = r^x$, berapa nilai r yang baik untuk dicoba?
- Tuliskan fungsi dasar yang kamu gunakan.

d.



Ayo, Berpikir Kreatif

Ingat lagi bahwa transformasi fungsi adalah $y = a \cdot f\left(\frac{x-h}{b}\right) + k$ dan kamu perlu mencari nilai masing-masing konstantanya.

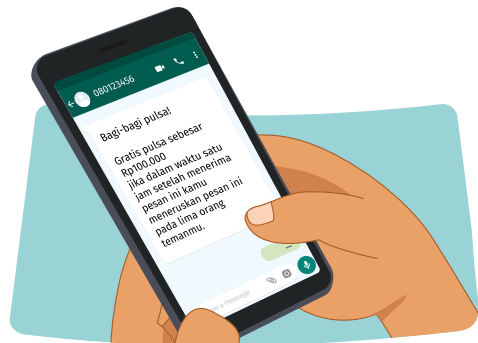
- Perhatikan awal masa pengamatan disebut hari ke-0. Apa artinya ini terhadap nilai h dan k ?
- Berapa massa zat radioaktif mula-mula? Ini menentukan konstanta apa?
- Pada tabel hasil percobaan zat radioaktif, terlihat bahwa zat radioaktif yang diamati waktu paruhnya sekitar 3 hari. Ini adalah informasi penting yang dapat dimanfaatkan untuk mencari peregangan/pemampatan fungsi tersebut.

e. Tuliskan fungsi hasil transformasinya.

- Gambarkan grafik fungsi hasil transformasi tersebut.
- Apakah fungsi ini mendekati data yang ada?

2. Tahukah kamu seberapa cepat sebuah hoaks dapat menyebar? Mari bayangkan jika sebuah pesan seperti di samping ini muncul di layar ponselmu.

Tabel berikut menunjukkan banyaknya orang yang menerima pesan tersebut setiap jam.



Waktu (jam)	1	2	3	4
Banyaknya orang yang menerima pesan	5	20	155	699

- Jenis fungsi dasar apa yang dapat digunakan untuk memodelkan hal ini? Bagaimana kamu menentukannya?
- Buatlah model matematikanya.

- c. Gunakan model matematika tersebut untuk memperkirakan: butuh berapa jam hingga pesan tersebut mencapai setidaknya 3.000 orang? Setidaknya 10.000 orang?
3. Seorang produsen mengetahui bahwa biaya produksi tergantung banyaknya barang yang diproduksi. Bantulah ia untuk menentukan fungsinya.

Banyaknya barang yang dihasilkan	10	20	30	40	50
Biaya produksi	500	400	500	800	1300

- a. Tentukan model matematikanya.
- b. Gunakan model matematika tersebut untuk memprediksi biaya produksi saat produsen menaikkan produksi menjadi 60 barang.

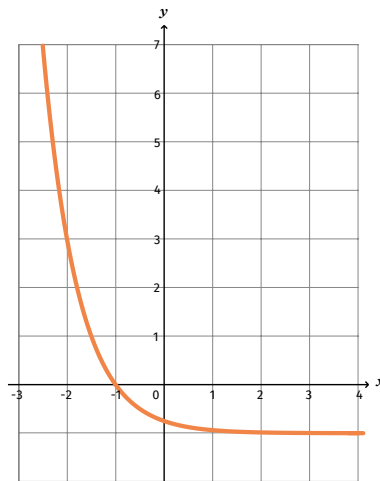
Uji Kompetensi

Untuk mengetahui apakah kamu telah menguasai materi transformasi fungsi, kerjakan soal-soal berikut.

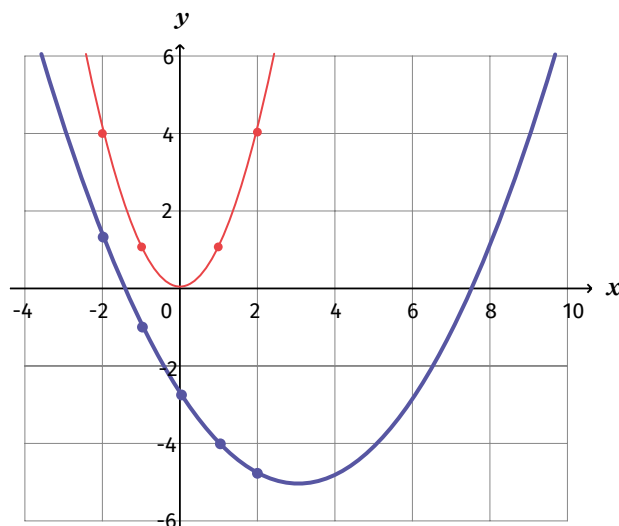
Tanpa Menggunakan Teknologi

1. Tentukan fungsi yang dihasilkan jika $y = 3x - 1$ digeser sejauh 3 satuan ke kiri dan 4 satuan ke atas.
2. Fungsi $y = 2x^2 - 1$ dicerminkan terhadap suatu garis menghasilkan fungsi $y = -2x^2 + 3$. Tentukan garis yang digunakan sebagai cermin.
3. Suatu kurva memiliki persamaan $y = 9 - (x - 2)^2$
 - a. Jelaskan tiga transformasi berurutan yang dibutuhkan untuk memetakan $y = x^2$ menjadi kurva tersebut.
 - b. Sketsa kurva tersebut dengan menunjukkan titik potong sumbu- x , sumbu- y dan titik maksimum.

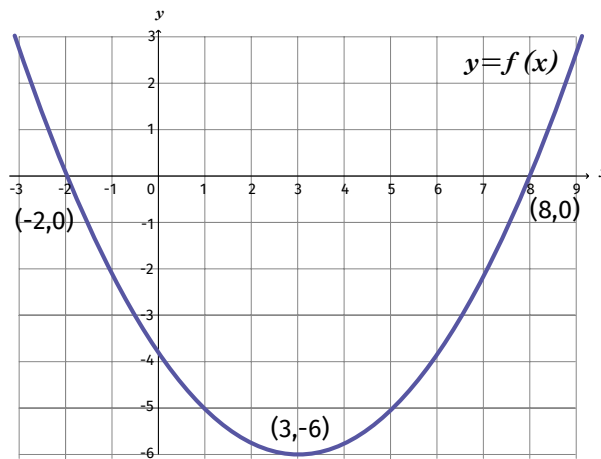
4. Tentukan fungsi yang ditunjukkan oleh grafik berikut.



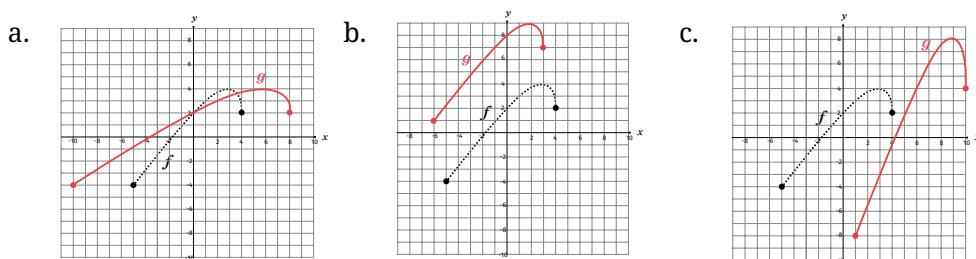
5. Suatu kurva memiliki persamaan $y = 3^x + 1$.
- Jelaskan dua transformasi berurutan yang dibutuhkan untuk memetakan kurva tersebut menjadi $y = 3^{x+1} + 3$.
 - Jelaskan sebuah transformasi tunggal yang dapat digunakan untuk memetakan kurva tersebut menjadi $y = 3^{x+1} + 3$.
6. Perhatikan grafik berikut yang menunjukkan hasil transformasi dari fungsi f (garis putus-putus merah) menjadi fungsi g (garis biru) dengan peregangan dan pergeseran. Tentukan transformasi yang dilakukan, dan tuliskan persamaan $g(x)$ dalam bentuk f .



7. Fungsi $f(x) = \frac{6}{25}(x+2)(x-8)$ ditunjukkan oleh grafik di bawah ini.



- Jika fungsi $y = 2f(x + \alpha)$ melalui titik nol maka tentukan nilai yang mungkin dari α .
 - Jika fungsi $y = \beta f(x + 2)$ merupakan hasil transformasi dari $y = f(x)$ dan titik semula $(3, -6)$ berubah menjadi $(\gamma, 2)$ maka tentukan nilai dari β dan γ .
8. Seorang siswa bernama Erika menemukan bahwa untuk sebuah fungsi $f(x)$ terdapat $f(4) = 8$. Dia kemudian memperhatikan bahwa titik $A(2, 8)$ berada pada grafik hasil peregangan, yaitu $y = f(2x)$ dan titik $B(5, 8)$ berada pada grafik hasil peregangan dan translasi, yaitu $y = f(2x - 6)$. Jadi, Erika mengambil kesimpulan bahwa titik pada grafik $y = f(2x - 6)$ adalah 3 satuan di sebelah kanan dari titik pada grafik $y = f(2x)$. Menurutmu, bagaimana kesimpulan Erika tersebut?
- Erika melakukan kesalahan.
 - Itu kebetulan saja, tidak semua titik pada $y = f(2x)$ 3 satuan di sebelah kanan dari titik pada $y = f(2x)$.
 - Grafik $y = f(2x)$ adalah hasil pergeseran 3 satuan ke kanan dari grafik $y = f(2x)$.
- Jelaskan jawabanmu!
9. Untuk masing-masing grafik berikut ini tentukan transformasi yang terjadi dari grafik fungsi f (putus-putus) menjadi grafik fungsi g . Tuliskan persamaan untuk $g(x)$ dalam bentuk f .



10. Seorang penjual mendapatkan komisi berdasarkan banyaknya penjualan yang dilakukan per bulan, dan dapat dimodelkan dengan $f(x) = x$ dengan x menyatakan uang dalam jutaan rupiah. Fungsi sederhana ini kurang realistis karena menunjukkan bahwa penjual tersebut mendapatkan komisi 1 juta rupiah untuk setiap penjualan sebesar 1 juta rupiah juga. Berikut ini skenario yang lebih masuk akal.

- Penjual mendapatkan komisi 5% dari total penjualan bulannya.
- Penjual mendapatkan komisi 5% dari total penjualannya yang melampaui 200 juta rupiah.

Lakukan transformasi fungsi $f(x) = x$ untuk memodelkan kedua skenario tersebut.

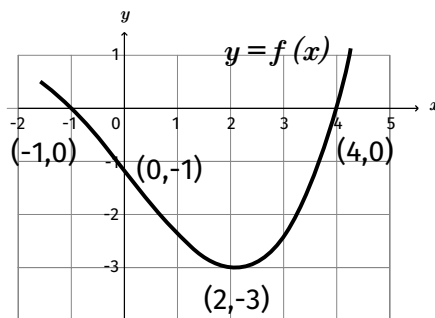
Dengan Menggunakan Teknologi

Tabel berikut menunjukkan hubungan antara kelajuan mobil dengan efisiensi bahan bakar. Gunakan teknologi untuk menentukan model matematika yang menyatakan hubungan antara kelajuan mobil dengan efisiensi bahan bakarnya.

Kelajuan (km/jam)	16	32	48	64	80	96	112	128
Bahan Bakar (km/liter)	7,5	10,2	12,2	13,2	13,5	12,8	11,3	9,1

Pengayaan

Gambar berikut menunjukkan grafik sebuah fungsi $y = f(x)$. Grafik tersebut memotong sumbu- x di titik $(-1,0)$ dan $(4,0)$, serta memotong sumbu- y di titik $(0,-1)$. Titik minimum fungsi terletak pada $(2,-3)$.



Pada bidang koordinat terpisah, buatlah sketsa grafik fungsi:

1. $y = f(x - 2)$
2. $y = -2f(x)$

Setiap grafik perlu memuat informasi letak bayangan keempat titik yang diketahui posisinya dalam soal.

Refleksi

Kamu telah mempelajari bab Transformasi Fungsi. Mari, kita periksa kembali apa saja yang telah kamu pelajari.

Materi	Mengerti	Perlu Bantuan
Pergeseran fungsi		
Pencerminan fungsi		
Peregangan dan pemampatan fungsi		
Menggunakan transformasi fungsi untuk memodelkan situasi nyata		

Jika kamu ingin belajar lebih jauh tentang Transformasi Fungsi, kamu dapat membaca buku *Matematika Tingkat Lanjut Kelas XI*.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2024

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI (Edisi Revisi)

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-388-329-0

Bab

4

Lingkaran



Bagaimana sifat lingkaran dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah?

Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran ini kamu akan belajar sifat-sifat lingkaran dan memanfaatkannya untuk menyelesaikan masalah yang terkait.

Kata Kunci

- sudut pusat
- sudut keliling
- busur lingkaran
- garis singgung
- tali busur

Peta Konsep





Ayo, Berpikir Kritis

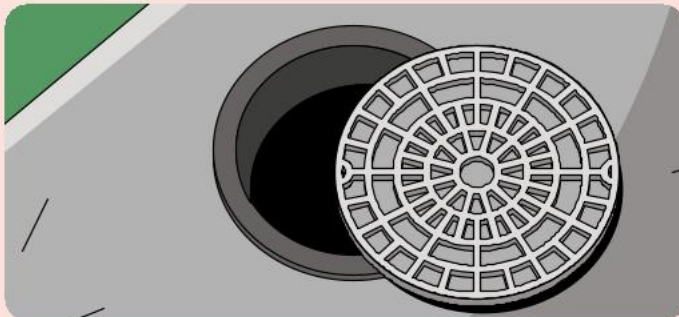
Roda sepeda umumnya berbentuk lingkaran. Pernahkah kamu bertanya, “Mengapa? Apa yang terjadi jika roda sepeda tidak berbentuk lingkaran?”



Gambar 4.1 Sepeda dengan Berbagai Bentuk Roda



Ayo, Berpikir Kritis



Gambar 4.2 Penutup Lubang Selokan

Lubang untuk memeriksa selokan (lihat Gambar 4.2) umumnya permukaannya berbentuk lingkaran. Bagaimana kaitan bentuk lingkaran dengan keselamatan pekerja yang sedang berada di dalam? Apa yang terjadi jika permukaan tutup lubang bentuknya berbeda? Bagaimana jika tutupnya berbentuk persegi? Bagaimana jika persegi panjang?



Tahukah Kalian?

- Pythagoras adalah matematikawan yang hidup pada abad ke-6 Sebelum Masehi. Para pengikutnya membentuk sebuah sekte tertutup yang disebut Pythagoreans. Pengikut sekte ini menganggap lingkaran sebagai bangun yang sempurna.
- Archimedes adalah matematikawan Yunani Kuno yang hidup pada abad ke-3 Sebelum Masehi. Menurut legenda, Archimedes sedang berkonsentrasi penuh mempelajari lingkaran (yang digambarkan pada pasir di hadapannya) saat kota tempat tinggalnya dikalahkan dalam perang. Pasukan lawan (yang ditugaskan membawa Archimedes kepada pemimpin mereka) menanyakan identitasnya. Archimedes (yang konsentrasinya terganggu oleh kehadiran mereka) menjawab dengan gusar, “Jangan ganggu lingkaran saya!” Kalimat tersebut disebut sebagai kata-kata terakhir Archimedes.

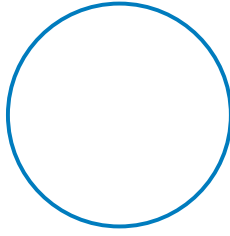
Pada bab ini kamu akan mempelajari tentang lingkaran dan teorema-teorema yang berhubungan dengan lingkaran. Kamu juga akan menerapkan teorema-teorema itu untuk menyelesaikan masalah yang terkait dengan lingkaran.



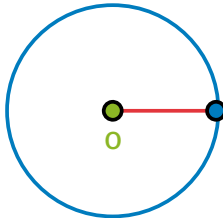
Ayo, Mengingat Kembali

Gambarlah sebuah titik pada kertas, beri nama titik O. Ambil penggaris dan tandai sebuah titik yang berjarak 2 cm dari titik O (beri nama titik A). Tandai titik lain yang berjarak 2 cm dari titik O. Gambarkan 10 titik lain yang berjarak 2 cm dari titik O.

1. Bangun datar apa yang terbentuk, jika semua titik yang berjarak 2 cm dari titik O dihubungkan, termasuk titik-titik lain yang belum kamu gambarkan?
2. Apa nama titik O pada bangun datar tersebut?
3. Jarak 2 cm itu disebut apa bagi bangun datar tersebut?

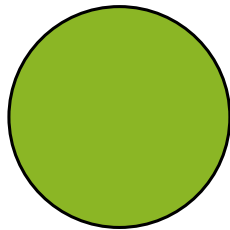


Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama dari suatu titik tertentu (disebut **pusat** lingkaran). Jarak yang sama itu disebut **jari-jari**.



Ruas garis yang menghubungkan pusat lingkaran dengan salah satu titik pada lingkaran disebut **jari-jari**.

Daerah yang dibatasi oleh lingkaran disebut **daerah lingkaran**.



A. Lingkaran dan Busur Lingkaran

Pada masa sebelum adanya GPS (*Global Positioning System*), mercusuar dibangun untuk menolong kapal bernavigasi sehingga tidak menabrak karang. Daerah yang diterangi oleh lampu mercusuar berbentuk daerah lingkaran. Kapal bernavigasi dengan memanfaatkan perhitungan sudut yang akurat sehingga dapat berlayar dengan aman. Pada subbab ini kamu akan belajar beberapa hal yang berkaitan dengan sudut pada lingkaran.



Gambar 4.3 Mercusuar



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 4.1

Sebuah kolam ikan berbentuk lingkaran. Pada salah satu tepi kolam ada air terjun mini. Di tengah kolam ada sebuah batu yang di atasnya ditempatkan lampu sorot, mengarah ke air terjun tersebut.

Suatu hari, lampu sorot di tengah kolam tersebut mati. Ternyata masalahnya ada pada sistem kelistrikan ke tengah kolam. Pemilik kolam bermaksud membuat jalur listrik baru yang terletak di tepi kolam.

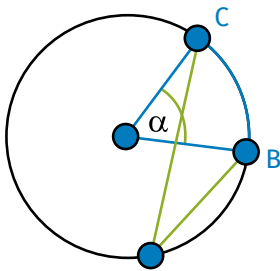


Gambar 4.4 Kolam Ikan

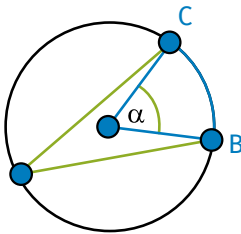
Lakukan eksplorasi berikut untuk menemukan hubungan antara ukuran lampu di tengah kolam dan di tepi kolam. Selanjutnya, tentukan di bagian mana lampu harus diletakkan di tepi kolam.

Lampu sorot yang digunakan adalah produksi pabrik Q yang memiliki sudut penyorotan tertentu.

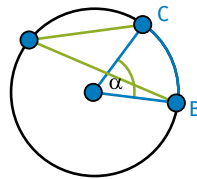
1. Bagaimana kriteria lampu yang dibutuhkan jika letaknya di tepi kolam? Apakah sama dengan saat lampunya di tengah kolam?
- a. Pelajari hubungan sudut yang terletak di pusat lingkaran dan sudut yang terletak pada lingkaran. Amati beberapa lingkaran yang diberikan. Ukur sudut-sudutnya dan lengkapi tabel berikut.



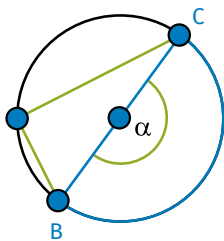
Lingkaran 1



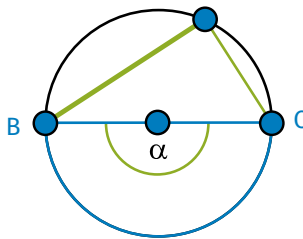
Lingkaran 2



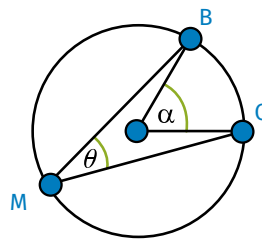
Lingkaran 3



Lingkaran 4



Lingkaran 5



Lingkaran 6

Tabel 4.1 Sudut Pusat dan Sudut Keliling

Nama Lingkaran	α	θ



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat juga mempelajari hubungan antara α dan θ dengan menggunakan tautan atau kode respons cepat berikut.



<https://bukupusbuk.id/s/4zgqvp>

- b. Bagaimana hubungan antara α dan θ ?
2. Di titik mana lampu itu perlu diletakkan di tepi kolam?
 - a. Pelajari hubungan antara sudut-sudut yang terletak pada lingkaran yang menghadap pada busur yang sama.



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat juga mempelajari hubungan antara sudut-sudut yang terletak pada lingkaran yang menghadap pada busur yang sama dengan menggunakan tautan atau kode respons cepat berikut.

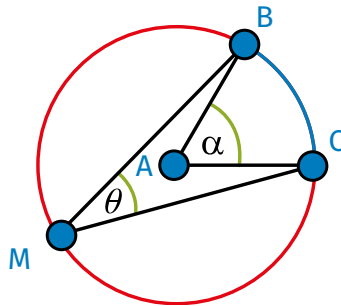


<https://bukupusbuk.id/s/qthtyj>

- b. Bagaimana besar sudut pada lingkaran yang menghadap pada busur yang sama?

Dalam matematika,

- Sudut α disebut sudut pusat yang menghadap pada $\widehat{BC}$. Sudut pusat adalah sudut yang titik sudutnya terletak pada pusat lingkaran dan kaki-kaki sudutnya adalah jari-jari lingkaran.



- Sudut θ disebut sudut keliling yang menghadap pada $\widehat{BC}$. Sudut keliling adalah sudut yang titik sudutnya terletak pada lingkaran dan kaki-kaki sudutnya berupa tali busur.
- Apakah kamu ingat apa yang dimaksud tali busur? **Tali busur** adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran.
- $\widehat{BC}$ disebut busur lingkaran. Busur yang lebih kecil disebut busur minor (pada gambar berwarna biru) dan bagian yang lebih besar disebut busur mayor (pada gambar berwarna merah). Jika hanya disebutkan kata busur, maka yang dimaksud adalah busur minor. Busur BC dituliskan $\widehat{BC}$. Besarnya $\widehat{BC}$ ditentukan oleh besarnya $\angle BAC = \alpha$ (Titik A adalah pusat lingkaran).

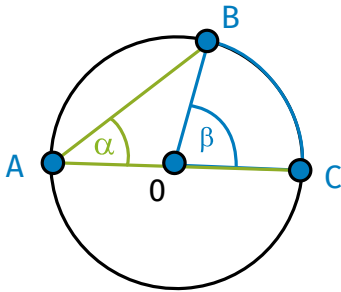
Setelah melakukan **Eksplorasi 4.1** kamu telah menemukan hubungan antara sudut pusat dengan sudut keliling yang menghadap busur yang sama. Kamu juga telah menemukan hubungan antarsudut keliling yang menghadap busur yang sama. Apakah mencoba semacam ini cukup untuk meyakinkanmu?

Dalam matematika, menunjukkan suatu sifat melalui beberapa contoh belum dapat disebut pembuktian yang sah. Pembuktian yang sah haruslah menunjukkan bahwa suatu sifat berlaku secara umum. Bagaimana cara melakukan pembuktian yang sah? Melalui langkah-langkah berikut, kamu akan belajar membuktikan secara deduktif hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama.

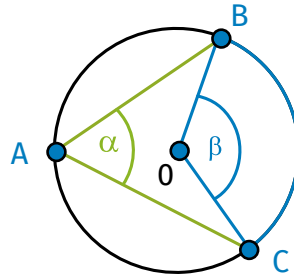
Pembuktian

Kinan dan Angga ingin membuktikan hasil pengamatan mereka tentang hubungan sudut pusat dan sudut keliling pada lingkaran.

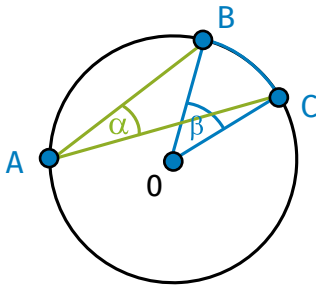
Angga mengusulkan bahwa ada empat kemungkinan.



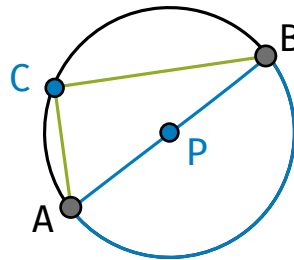
Kasus 1



Kasus 2



Kasus 3

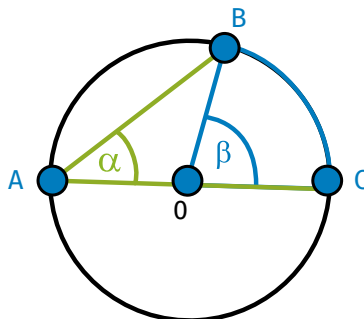


Kasus 4

Ayo, belajar membuktikan bersama Kinan dan Angga. Lengkapi bagian-bagian yang kosong sesuai dengan alasan di sampingnya.

- Kasus 1**

Pertama-tama perhatikan kasus khusus saat $\overline{AC}$ melalui titik O .
Ingat bahwa $\overline{AC}$ artinya ruas garis AC .



Bukti:

$$\overline{OA} = \overline{OB}$$

$\overline{OA}$ dan $\overline{OB}$ adalah jari-jari lingkaran sehingga $\triangle AOB$ merupakan segitiga sama ____.

$$\angle OAB = \angle \text{_____} = \alpha$$

sudut-sudut yang sama besar dalam $\triangle AOB$

$$\angle AOB = \text{_____} \quad \dots (1)$$

jumlah sudut dalam $\triangle AOB$ adalah 180° (nyatakan $\angle AOB$ dalam α)

$$\angle AOB = \text{_____} \quad \dots (2)$$

$\angle AOB$ adalah pelurus $\angle BOC$ (nyatakan $\angle AOB$ dalam β)

$$\beta = \text{_____}$$

Gabungkan persamaan (1) dan (2) untuk menemukan hubungan antara α dan β

(TERBUKTI)

Pembuktian untuk kasus 2–4 akan kamu lakukan di **Latihan 4.1**.



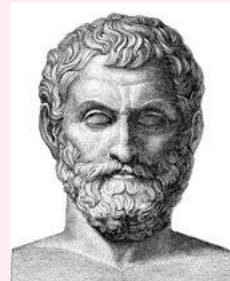
Tahukah Kalian?

Kasus 4 dikenal dengan nama Teorema Thales.

Thales adalah orang Yunani yang menjadi matematikawan, ahli astronomi, dan filsuf. Dalam Matematika, Thales adalah orang pertama yang menerapkan argumentasi deduktif dalam geometri. Dia adalah orang pertama yang namanya disematkan pada teorema.

Teorema Thales:

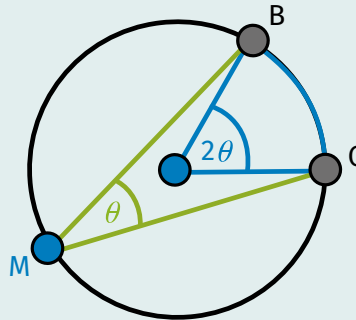
Jika tiga titik A, B, C terletak pada lingkaran dan $\overline{AB}$ adalah diameter, maka $\angle ACB$ siku-siku.



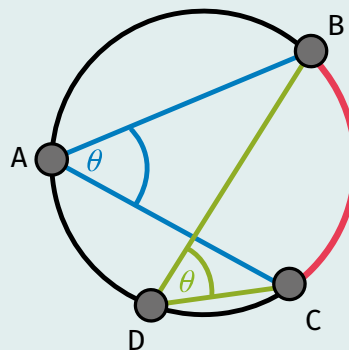
Gambar 4.5 Thales of Miletus
Sumber: [en.wikipedia.org/Wilhelm Meyer](https://en.wikipedia.org/Wilhelm_Meyer) (2021)

Setelah menyelesaikan **Eksplorasi 4.1** kamu telah belajar bahwa:

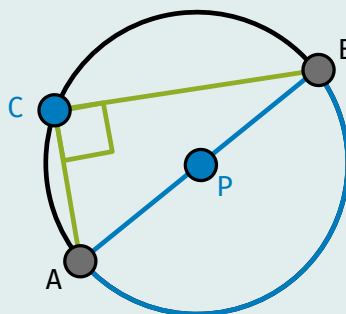
- Sudut pusat besarnya dua kali sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama.



- Sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama, besarnya sama.



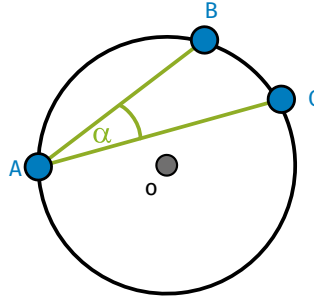
- Sudut keliling yang menghadap pada diameter lingkaran adalah sudut siku-siku.



2. Buktikan Kasus 3 dari **Eksplorasi 4.1**.

Kasus 3 adalah kasus saat diameter yang melalui A tidak membelah α .

- Gambarkan sudut pusat yang menghadap ke busur yang sama dengan sudut keliling $\angle BAC$.
- Apakah pada lingkaran tersebut juga berlaku bahwa sudut pusat besarnya dua kali lipat sudut keliling? Buktikan.

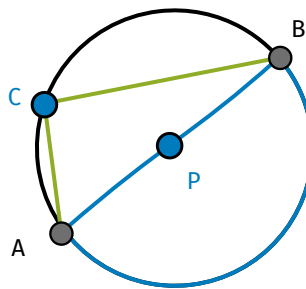


Petunjuk

- Sebagai garis bantu, gambarkan diameter yang melalui titik A dan titik O .
- Nyatakan $\angle BAC$ dan $\angle BOC$ sebagai pengurangan dua sudut. Lakukan langkah-langkah seperti pada Kasus 2

3. Buktikan Kasus 4 dari **Eksplorasi 4.1**.

Kasus 4 adalah kasus khusus untuk sudut keliling yang menghadap pada diameter lingkaran ($\angle ACB$).

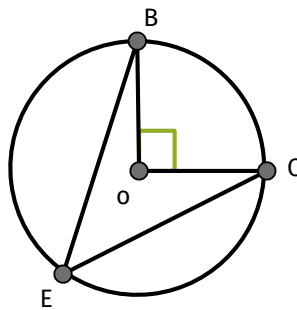


Petunjuk

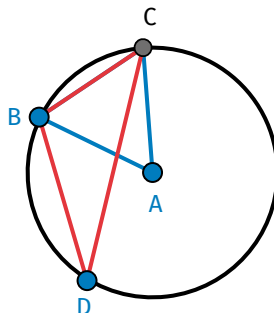
Kali ini, garis bantu yang digunakan adalah jari-jari $\overline{PC}$.

Bukti:

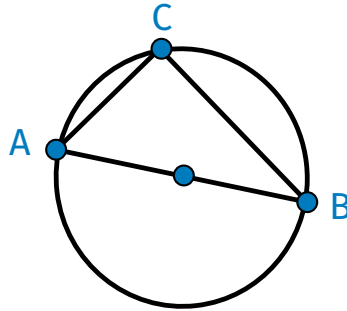
- Segitiga jenis apakah $\triangle APC$ dan $\triangle BPC$? Bagaimana kamu tahu?
 $\triangle APC$ adalah segitiga _____ karena ____ = ____.
 $\triangle BPC$ adalah segitiga _____ karena _____.
 - Nyatakan besarnya sudut-sudut yang sama pada $\triangle APC$ sebagai x°
 $x^\circ = \angle \text{_____} = \angle \text{_____}$
 - Nyatakan besarnya sudut-sudut yang sama pada $\triangle BPC$ sebagai y°
 $y^\circ = \angle \text{_____} = \angle \text{_____}$
 - Tuliskan sudut-sudut pada $\triangle ABC$ dalam x° dan y° .
 - $\angle A = \text{_____}$
 - $\angle B = \text{_____}$
 - $\angle C = \text{_____}$
 - Berapakah besarnya jumlah semua sudut dalam segitiga? Nyatakan $\angle A$, $\angle B$, dan $\angle C$ dalam x° dan y° untuk menentukan besarnya $\angle ACB$.
 $\angle A + \angle B + \angle C = \dots\dots\dots$
 $\angle ACB = \dots$
4. Jika $\angle BOC = 90^\circ$, berapakah besar $\angle BEC$?



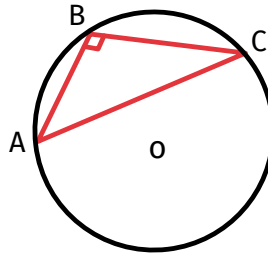
5. Lingkaran A berjari-jari 2 satuan. Jika panjang $\overline{BC} = 2$, tentukan besar $\angle BDC$.



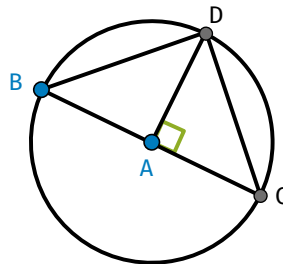
6. $\overline{AB}$ adalah diameter pada lingkaran berikut. Jari-jari lingkaran 8,5 cm dan panjang $\overline{AC}=8$ cm. Tentukan:



- a. Besar $\angle ACB$
 - b. Panjang $\overline{AB}$
 - c. Panjang $\overline{BC}$
7. Apa yang salah pada gambar berikut?



8. Lingkaran A berjari-jari 2 cm, tentukan:



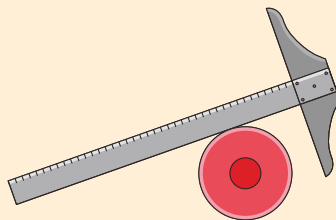
- a. Besar $\angle BDC$
- b. Jika $\angle CAD = 90^\circ$, tentukan besar $\angle ACD$.
- c. Panjang $\overline{CD}$

9.



Ayo, Berpikir Kreatif

Jelaskan cara memanfaatkan alat gambar teknik berbentuk T ini untuk menentukan letak titik pusat piring.



10.



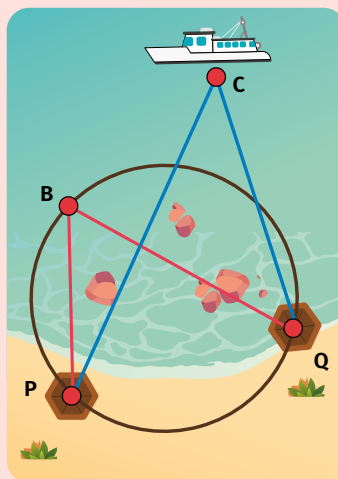
Ayo, Berpikir Kritis

Pada gambar berikut, titik P dan titik Q adalah mercusuar. Daerah dengan karang berbahaya telah dipetakan dan lingkaran menyatakan daerah berbahaya tersebut. Kapal diharapkan tidak memasuki daerah lingkaran untuk menghindari kemungkinan kandas.

Pelajari besar sudut yang dibentuk antara cahaya dari kedua mercusuar ($\angle PCQ$) jika kapal berada:

- di luar lingkaran
- pada lingkaran
- di dalam lingkaran

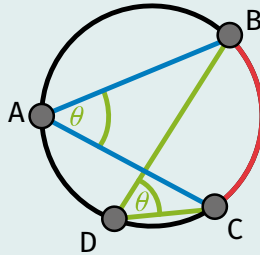
Menurutmu, informasi apa yang perlu diketahui kapten kapal tentang lokasi ini untuk memastikan kapalnya tidak kandas?



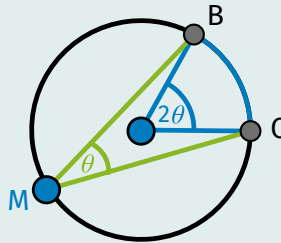
Rangkuman

Sifat-sifat sudut pada lingkaran:

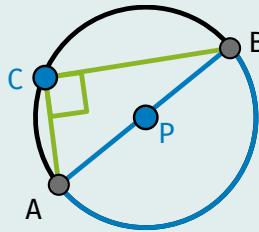
1. Sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama, besarnya sama.



2. Sudut pusat besarnya dua kali sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama.



3. Sudut keliling yang menghadap pada diameter lingkaran adalah sudut siku-siku.

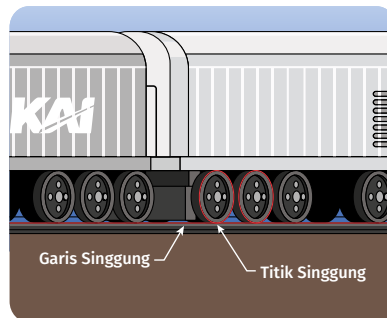


Ayo, Berefleksi

1. Apakah saya memahami hubungan sudut keliling dan sudut pusat?
2. Apakah saya memahami hubungan sudut keliling dan busur lingkaran?
3. Apakah saya bisa mengerjakan soal-soal yang terkait dengan sudut keliling dan sudut pusat lingkaran?

B. Lingkaran dan Garis Singgung

Roda kereta api menyentuh rel kereta di satu titik. Secara matematis dikatakan rel adalah **garis singgung** roda dan titik sentuhnya disebut sebagai **titik singgung**.



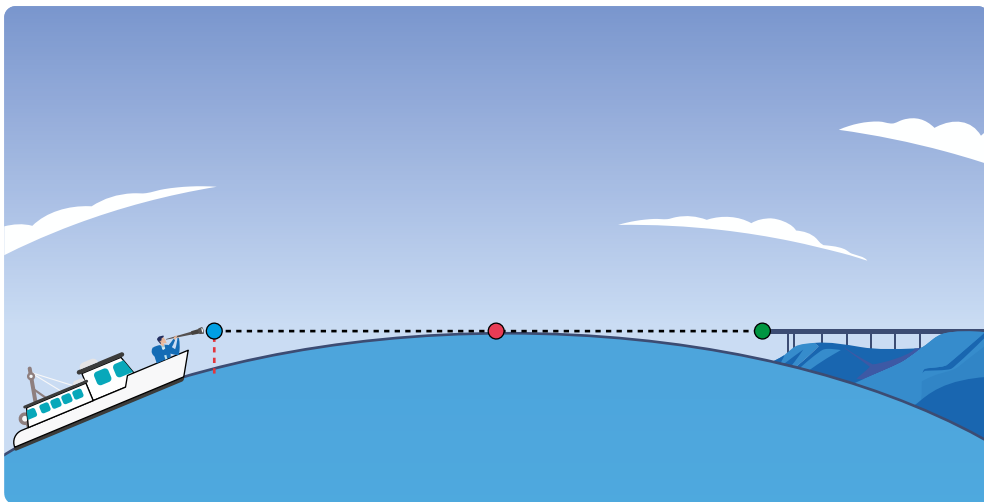
Gambar 4.6 Roda Kereta Api



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 4.2

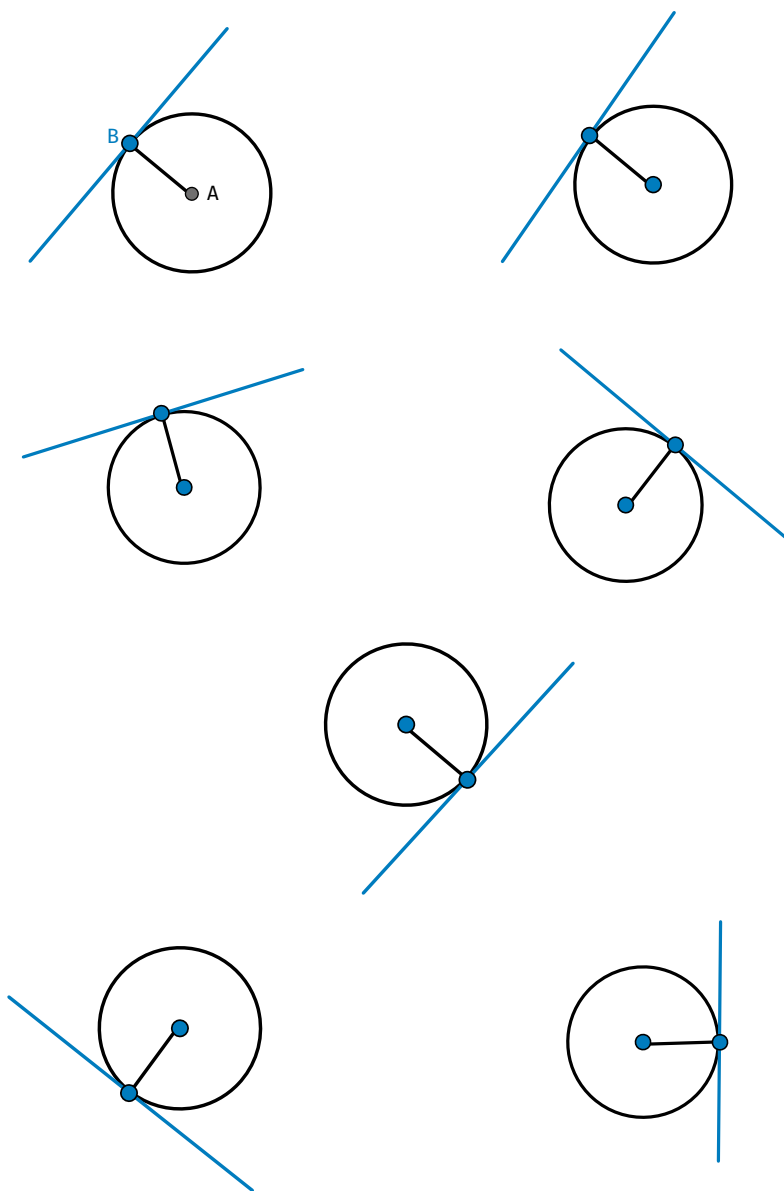
Dalam tugasnya, seorang navigator pada kapal laut bertanggung jawab terhadap arah dan jalur yang ditempuh kapalnya. Jika pelabuhan telah tampak di cakrawala, ia perlu tahu jarak pelabuhan tersebut.



Gambar 4.7 Cakrawala

Titik biru mewakili posisi navigator pada kapal, titik hijau adalah pelabuhan yang tampak di cakrawala. Garis merah adalah jarak navigator ke permukaan air. Garis hitam mewakili pandangan navigator ke pelabuhan, secara matematis garis yang menggambarkan pandangan navigator ke pelabuhan ini merupakan **garis singgung**. Mari bereksplorasi menyelidiki sifat-sifat garis singgung.

1. Garis singgung menyentuh lingkaran pada tepat satu titik (disebut titik singgung). Gunakan busur derajat untuk mengukur besar sudut yang dibentuk oleh garis singgung dan jari-jari lingkaran (pada titik singgung).



Berapa besar sudut yang dibentuk oleh garis singgung dan jari-jari lingkaran pada titik singgung?



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat juga mempelajari besarnya sudut yang dibentuk oleh garis singgung dan jari-jari lingkaran pada titik singgung dengan menggunakan tautan atau kode respons cepat berikut.

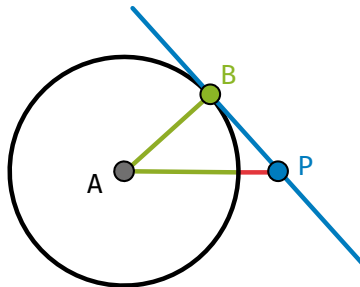


<https://bukupusbuk.id/s/uh3cx3>

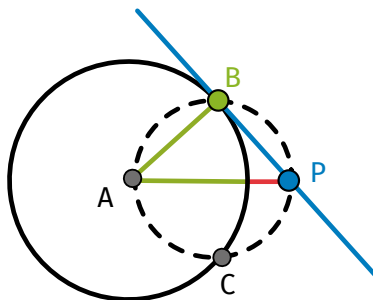
2. Melalui sebuah titik pada lingkaran, gambarkan garis yang tidak membentuk sudut siku-siku dengan jari-jari lingkaran.
 - a. Garis tersebut memotong lingkaran di berapa titik?
 - b. Apakah garis tersebut merupakan garis singgung?

Garis sekan adalah garis yang memotong lingkaran pada **dua** titik.

3. Kinan dan Angga mempelajari lebih lanjut tentang garis singgung lingkaran. Mereka menggambar garis singgung dari titik P ke lingkaran A .



Kinan ingat teorema Thales sehingga ia menduga ada sebuah lingkaran yang dapat digambarkan yang melalui titik A , B , dan P dengan AP sebagai diameternya.



Tariklah ruas garis dari titik P ke setiap titik potong kedua lingkaran.

- Apakah garis PB merupakan garis singgung atau garis sekan?
 - Apakah garis PC merupakan garis singgung atau garis sekan?
4. Berdasarkan pernyataan No. 3, berapa besar sudut berikut? Tentukan besar sudutnya.
- $\angle ABP =$ _____
 - $\angle ACP =$ _____
 - Jelaskan alasannya.
5. Apakah $\triangle ABP$ kongruen dengan $\triangle ACP$?
Jika ya, maka:
- Panjang $\overline{PB}$ _____ panjang $\overline{PC}$.
 - Sudut mana yang sama besar dengan $\angle APB$?



Petunjuk

Masih ingatkah kamu apa yang dimaksud segitiga yang kongruen? Kongruen artinya sama dan sebangun.

Panjang garis singgung adalah panjang ruas garis PB atau ruas garis PC .

6.



Ayo, Berpikir Kritis

- Dari sebuah titik di luar lingkaran, ada berapa banyak garis singgung yang dapat dibuat ke lingkaran itu?
 - Apakah garis singgung-garis singgung itu panjangnya sama atau berbeda?
7. Jika navigator tersebut mengetahui jari-jari bumi (R), dan ketinggiannya dari permukaan air (berdasarkan ukuran kapal) (h).
- Manakah yang merupakan segitiga siku-siku?
 - Di mana sudut siku-sikunya?
 - Bagaimana hubungan antarsisi dalam segitiga siku-siku?
 - Tentukan jarak kapal dengan pelabuhan yang tampak di cakrawala dalam R dan h .



Petunjuk

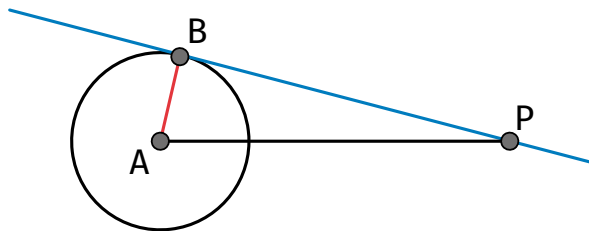
Ingatlah teorema Pythagoras.

Setelah menyelesaikan **Eksplorasi 4.2** kamu tentu sudah tahu bahwa:

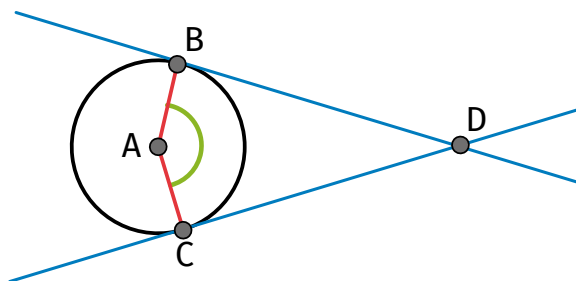
- Garis singgung berpotongan dengan lingkaran di satu titik.
- Titik potong lingkaran dengan garis singgung disebut titik singgung.
- Garis singgung dan jari-jari lingkaran di titik singgung berpotongan tegak lurus.
- Dari satu titik di luar lingkaran, dapat dibentuk dua garis singgung yang sama panjang.
- Panjang garis singgung dapat ditentukan dengan menggunakan teorema Pythagoras.

Latihan 4.2

1. Jika jari-jari lingkaran A adalah 7 cm dan titik P berjarak 25 cm dari titik A .
 - a. Berapa besar $\angle B$?
 - b. $\triangle ABP$ termasuk segitiga jenis apa?
 - c. Berapakah panjang garis singgung $\overline{PB}$?



2. Pada gambar berikut, $\overline{BD}$ dan $\overline{CD}$ adalah garis singgung lingkaran A . Diketahui $\angle BAC = 147^\circ$.
 - a. Berapa jumlah sudut dalam segi empat $ABDC$?
 - b. Tentukan besar $\angle BDC$.

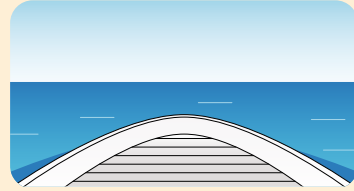


3.



Ayo, Berpikir Kreatif

Bram, seorang navigator kapal laut, tahu bahwa jari-jari lingkaran bumi panjangnya 6.371 km. Ruang kemudi kapal berada pada ketinggian 40 m dari permukaan laut. Tentukan jarak cakrawala yang dapat Bram lihat.

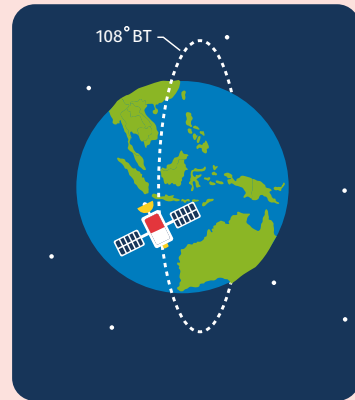


4.



Ayo, Berpikir Kritis

Satelit komunikasi, mengorbit bumi pada posisi yang tetap terhadap bumi (artinya jika dilihat dari bumi, satelit tersebut akan berada pada ketinggian dan bujur yang sama, meskipun bumi berputar dan mengelilingi matahari). Satelit Telkom-4 (Merah Putih) mengorbit bumi pada garis bujur 108° BT.

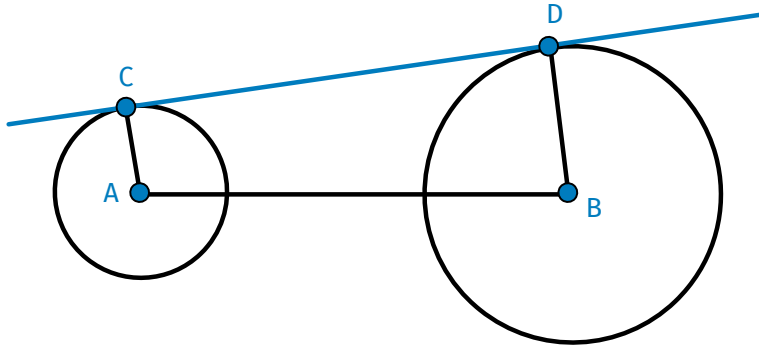


Jika jari-jari bumi adalah 6.371 km dan satelit Telkom-4 terletak pada ketinggian 35.786 km dari permukaan bumi, akan diselidiki apakah Satelit Telkom-4 dapat memancarkan sinyal ke seluruh wilayah Indonesia.

- Dari ketinggian tersebut, berapakah sudut yang dibentuk oleh garis-garis singgung satelit ke bumi?
- Sudut antara garis-garis singgung satelit ke bumi menyatakan apa dari satelit?
- Daerah yang dapat dilayani oleh satelit Telkom-4 terletak di antara garis bujur berapa dan berapa?
- Di manakah letak astronomis Indonesia?
- Apakah Satelit Telkom-4 dapat memancarkan sinyal ke seluruh wilayah Indonesia?

5. Garis singgung persekutuan luar

Garis singgung persekutuan adalah garis singgung yang merupakan garis singgung bagi dua lingkaran. $\overline{CD}$ merupakan garis singgung persekutuan luar untuk lingkaran A dan lingkaran B .



- Lingkaran A dan lingkaran B memiliki dua buah garis singgung persekutuan luar. Gambarkan garis singgung persekutuan luar yang lain.
- Tentukan panjang garis singgung persekutuan luar $\overline{CD}$ (s) jika jarak kedua pusat lingkaran (d) dan jari-jari masing-masing lingkaran diketahui (r dan R).



Petunjuk

Gambarkan garis bantu sehingga kamu dapat memanfaatkan Teorema Pythagoras.

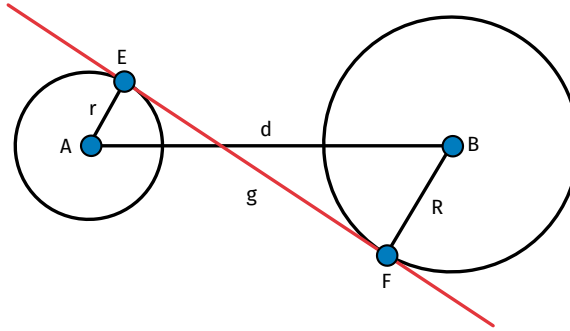
- Rantai sepeda berfungsi untuk memindahkan daya penggerak dari pedal ke roda.
 - Tunjukkan garis singgung persekutuan luar pada gambar rantai sepeda berikut.



- Tentukan panjang garis singgung persekutuan luarnya jika jari-jari lingkaran yang lebih besar = 5 cm, jari-jari lingkaran yang lebih kecil = 3 cm, dan jarak antara kedua pusat lingkaran = 44 cm.

7. Garis singgung persekutuan dalam

Selain garis singgung persekutuan luar, ada juga garis singgung persekutuan dalam. $\overline{EF}$ merupakan garis singgung persekutuan dalam untuk lingkaran A dan lingkaran B .



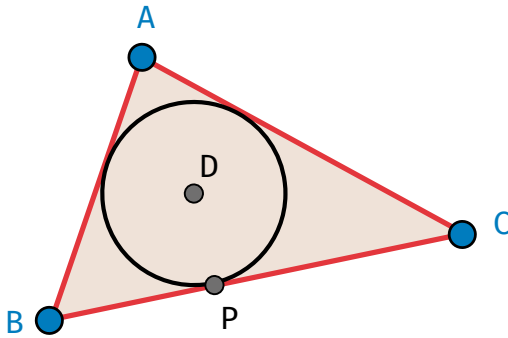
- Lingkaran A dan lingkaran B memiliki dua buah garis singgung persekutuan dalam. Gambarkan garis singgung persekutuan dalam yang lain.
 - Tentukan panjang garis singgung persekutuan dalam $\overline{EF}$ (g) jika jarak kedua pusat lingkaran (d) dan jari-jari masing-masing lingkaran diketahui (r dan R).
8. Dua buah lingkaran, pusatnya berjarak 5 cm. Jika kedua lingkaran tersebut masing-masing berjari-jari 1 cm dan 2 cm:
- Gambarkan kedua lingkaran dengan ukuran sebenarnya, juga semua garis singgung persekutuan kedua lingkaran.
 - Tentukan panjang masing-masing garis singgung persekutuan.
 - Manakah yang lebih panjang: garis singgung persekutuan dalam atau garis singgung persekutuan luar?



Petunjuk

Gambarkan garis bantu sehingga kamu dapat memanfaatkan Teorema Pythagoras.

9. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ dan $\overline{BC}$ adalah garis-garis singgung pada lingkaran D .
- Dalam $\triangle ABC$, lingkaran D adalah lingkaran apa?
 - Buktikan:** $AB + PC = AC + PB$



Petunjuk

- Tentukan titik-titik singgungnya.
- Tentukan ruas garis-ruas garis yang sama panjang.

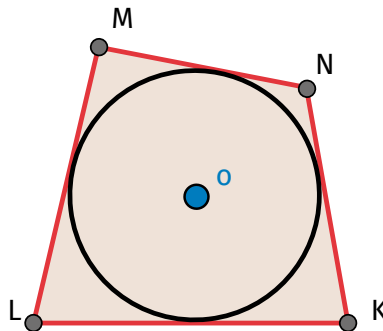
10.



Ayo, Berpikir Kritis

$\overline{KL}$, $\overline{LM}$, $\overline{MN}$, dan $\overline{NK}$ adalah garis-garis singgung pada lingkaran O . Segi empat $KLMN$ disebut segi empat garis singgung.

Buktikan: $LK + MN = LM + NK$

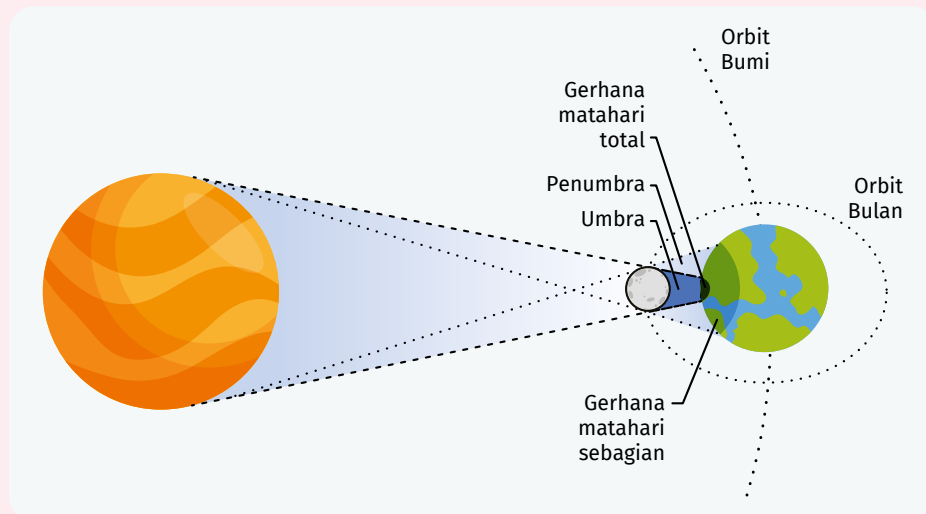


Latihan 4.2 nomor 9 dan 10 disebut **Teorema Pitot**.



Tahukah Kalian?

Garis singgung dapat digunakan untuk menentukan bagian bumi yang akan mengalami gerhana matahari.



Gambar 4.8 Gerhana Matahari

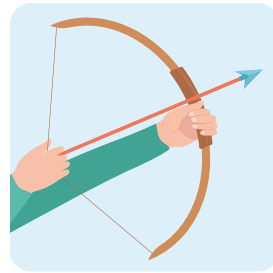


Ayo, Berefleksi

1. Apakah saya dapat menggambar garis singgung?
2. Apakah saya dapat menentukan panjang garis singgung?
3. Apakah saya paham sifat-sifat garis singgung?

C. Lingkaran dan Tali Busur

Busur panah merupakan bagian dari lingkaran dan talinya menghubungkan dua titik pada lingkaran. Dalam matematika, ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran disebut **tali busur**.



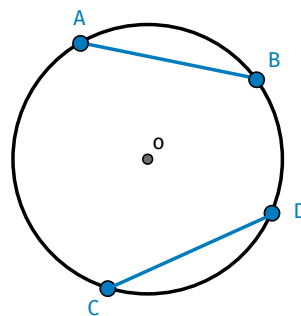
Gambar 4.9 Busur Panah



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 4.3

Jika dalam sebuah lingkaran ada dua tali busur yang panjangnya sama, bagaimana ukuran busur-busur tersebut? Ayo, buktikan bersama-sama!



Ayo, Berpikir Kreatif



1. Jika AB dan CD adalah dua tali busur yang sama panjang, gambarkan $\triangle OAB$ dan $\triangle OCD$. Apakah $\triangle OAB$ dan $\triangle OCD$ kongruen? Bagaimana kamu tahu?
2. Berdasarkan no. 1, bagaimana besar $\angle AOB$ dan $\angle COD$?
3. Gunakan no. 2 untuk menentukan hubungan besarnya $\widehat{AB}$ dengan $\widehat{CD}$.



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 4.4

Suatu hari Sondang, seorang siswi SMA kelas XI, dengan gembira mengatakan kepada Angga dan Kinan bahwa dia menemukan suatu teorema baru ketika sedang bereksplorasi dengan lingkaran. Sondang mengambil segitiga siku-siku yang sudut siku-sikunya menghadap pada diameter lingkaran. Kemudian, ia mencerminkan segitiga tersebut pada diameter lingkaran. Hasil pencerminan berupa segi empat memiliki sifat yang menarik, yaitu jumlah sudut yang berhadapan selalu sama dengan 180° .

- Apakah penemuan Sondang itu benar atau hanya kebetulan berlaku untuk kasus itu saja?
- Bagaimana kalau diagonal segi empat tidak harus merupakan diameter lingkaran? Apakah sifat itu masih berlaku?

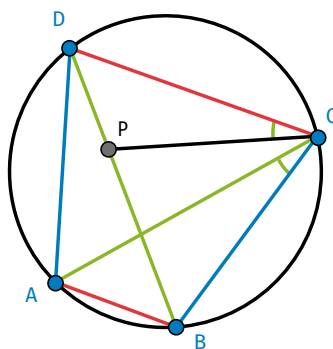
Coba kamu bereksplorasi dan membuat kesimpulan dengan melakukan langkah-langkah berikut.

1. Gambarkan sebuah lingkaran dan segitiga siku-siku yang sisi miringnya adalah diameter lingkaran. Cerminkan segitiga siku-siku itu pada diameter lingkaran. Perhatikan segi empat yang terbentuk. Apakah keempat titik sudutnya terletak pada lingkaran? Jelaskan!
2. Untuk masing-masing titik sudut, tentukan sudut tersebut menghadap ke busur yang mana.
 - a. _____
 - b. _____
 - c. _____
 - d. _____

3. Jumlahkan sudut-sudut yang berhadapan (nyatakan dalam busur lingkaran).
 - a. _____
 - b. _____
4. Apakah penemuan Sondang berlaku umum (dapat dibuktikan selalu berlaku berapa pun ukurannya)?
5. Bagaimana jika segi empat itu **bukan** merupakan penggabungan segitiga siku-siku dan pencerminannya? Apakah sifat yang sama masih berlaku?
 - a. Ulangi langkah 2 dan 3 jika keempat titik sudutnya terletak pada lingkaran.
 - b. Jika sebuah segi empat memiliki empat titik sudut yang terletak pada lingkaran, bagaimana jumlah sudut-sudut yang berhadapan?
 - c. Ulangi langkah 2 dan 3 jika salah satu titik sudutnya **tidak** terletak pada lingkaran.
 - d. Jika sebuah segi empat memiliki empat titik sudut yang **tidak** terletak pada lingkaran, bagaimana jumlah sudut-sudut yang berhadapan?

Segi empat yang keempat sisinya merupakan tali busur sebuah lingkaran disebut **segi empat tali busur**. Pada segi empat tali busur, sudut-sudut yang berhadapan jumlahnya _____.

6. Kamu telah menemukan sifat sudut-sudut pada segi empat tali busur. Adakah sifat segi empat tali busur yang terkait panjang ruas garisnya? Perhatikan segi empat tali busur $ABCD$ berikut.



- a. Gambarkan titik P pada $\overline{BD}$ sehingga $\angle ACB = \angle DCP$. Buktikan bahwa $\triangle CDP \sim \triangle CAB$
- b. Berdasarkan (a), tunjukkan bahwa $DP \cdot AC = AB \cdot CD$.

- c. Tunjukkan bahwa $\triangle ACD \sim \triangle BCP$.
- d. Berdasarkan (c), tunjukkan bahwa $BP \cdot AC = BC \cdot DA$.
- e. Berdasarkan (b) dan (d), apa yang dapat kamu simpulkan tentang $AC \cdot BD$?

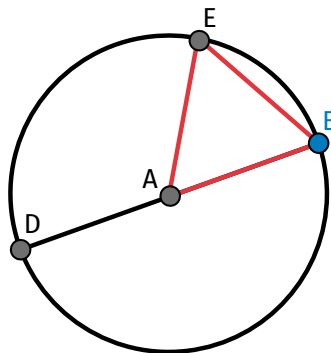
Hasil yang kamu dapatkan ini dikenal sebagai **Teorema Ptolemeus**.

Setelah mengerjakan **Eksplorasi 4.3** dan **Eksplorasi 4.4** kamu mengetahui bahwa:

- Pada sebuah lingkaran, dua tali busur yang panjangnya sama, menghubungkan busur yang sama besar.
- Pada segi empat tali busur, sudut-sudut yang berhadapan saling berpelurus.
- Pada segi empat tali busur, hasil kali diagonal sama besarnya dengan jumlah dari hasil kali sisi yang berhadapan.

Latihan 4.3

1. Lingkaran yang berpusat di titik O dan jari-jarinya 5 cm. Berapa panjang tali busurnya yang paling panjang?
2. Jika $AD = 3$ cm dan $BE = AD$, tentukan:
 - a. besar $\angle BAE$
 - b. besar $\angle BDE$



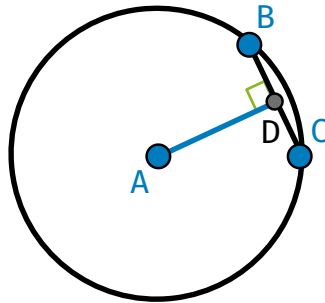
3. Apotema

Apotema adalah ruas garis dari pusat lingkaran dan tegak lurus tali busur (Pada gambar berikut ruas garis AD adalah apotema). Buktikan bahwa $BD = DC$.

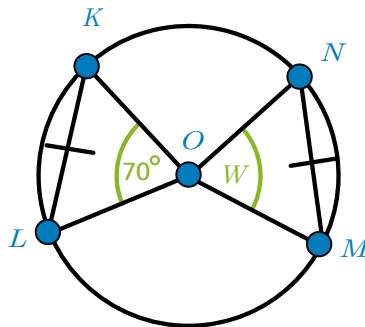


Petunjuk

Tinjau $\triangle ABD$ dan $\triangle ACD$



4. Tentukan nilai w sehingga $\overline{KL}$ dan $\overline{MN}$ sama panjang.



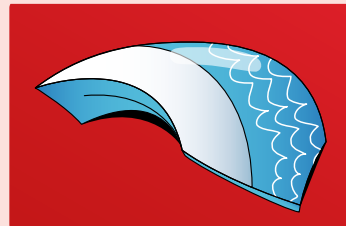
5.



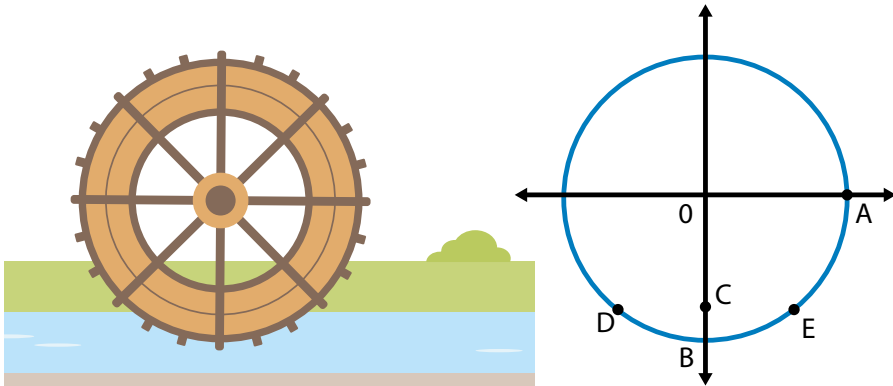
Ayo, Berpikir Kritis

Situs Gunung Padang adalah situs prasejarah megalitik besar yang terletak di Kabupaten Cianjur. Salah satu artefak yang ditemukan di sana diduga merupakan pecahan guci.

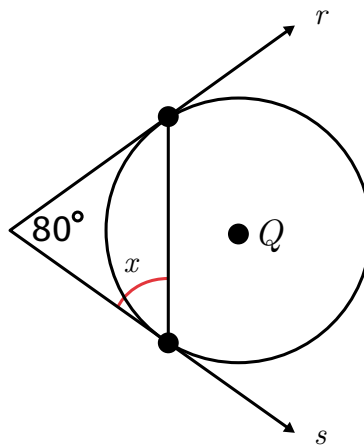
Diskusikan dengan temanmu bagaimana cara menentukan diameter mulut guci tersebut.



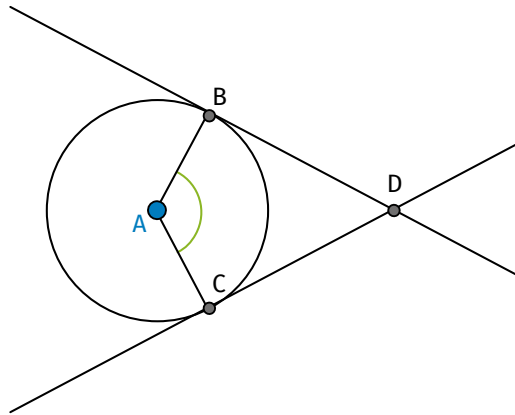
6. Kincir air berikut digunakan untuk pembangkit energi dan irigasi. Pada diagram sebelah kanan, roda dengan diameter 10 m diletakkan di sungai sehingga titik terendah roda terletak pada kedalaman 1 m.



- Tentukan ketinggian titik A dari permukaan air.
 - Permukaan air ditunjukkan oleh tali busur $\widehat{DE}$. Tentukan besar $\angle DAE$.
 - Tentukan jarak dua titik pada roda yang terletak di permukaan air.
7. Sinar garis r dan s adalah garis singgung pada lingkaran Q . Jika sudut antara r dan s adalah 80° , tentukan besarnya x .



8. $\overline{BD}$ dan $\overline{CD}$ adalah garis singgung pada lingkaran A .

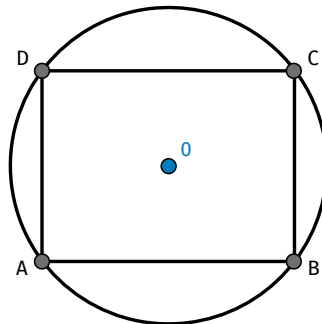


- Apakah segi empat $ABDC$ merupakan segi empat tali busur? Buktikan.
 - Jika segi empat $ABDC$ merupakan segi empat tali busur, di manakah pusat lingkaran luar segi empat $ABDC$?
9. Segi empat $ABCD$ adalah persegi panjang.



Petunjuk

Sebuah lingkaran disebut lingkaran luar segiempat $ABDC$ jika semua titik sudut segiempat $ABDC$ terletak pada lingkaran tersebut.



- Apakah $ABCD$ merupakan segi empat tali busur? Buktikan!
- Jika kamu menerapkan Teorema Ptolemeus pada segi empat $ABCD$, apakah yang kamu dapatkan?
- Apakah nama teorema tersebut?

10.



Ayo, Berpikir Kreatif

Goras ingin menyajikan pizza yang dibelinya di atas piring. Sayangnya, piring yang tersedia diameternya lebih kecil daripada diameter pizza. Ia memotong pizzanya dengan cara tertentu, mengambil sebagian, lalu menyusun sisa pizza sehingga terlihat sebagai pizza utuh.

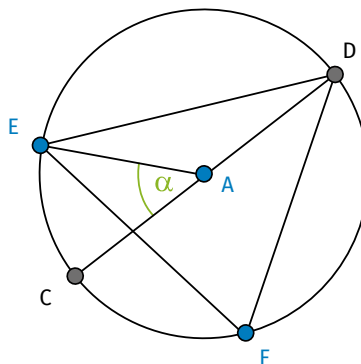
- Ambillah sepotong kertas berbentuk lingkaran. Cobalah melakukan hal yang dikerjakan Goras.
- Apakah pizza kedua sama dengan pizza awal? Jelaskan!

Refleksi

- Apakah saya dapat menerapkan teorema-teorema tentang lingkaran?
- Apakah saya dapat membuktikan teorema-teorema terkait lingkaran?
- Apakah saya memahami sifat-sifat garis singgung?
- Apakah saya memahami sifat-sifat segi empat tali busur?

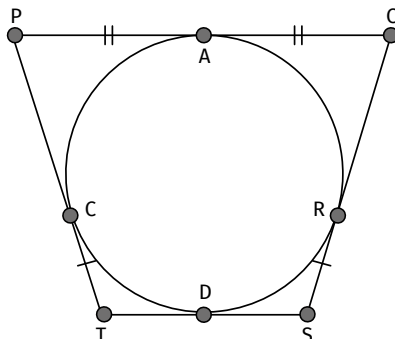
Uji Kompetensi

- Jika $\alpha = 48^\circ$, tentukan besarnya

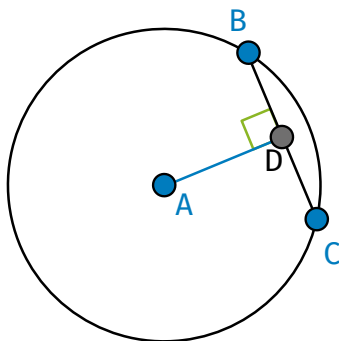


- $\angle CDE$
- $\angle DEA$
- $\angle DAE$
- $\angle DFE$

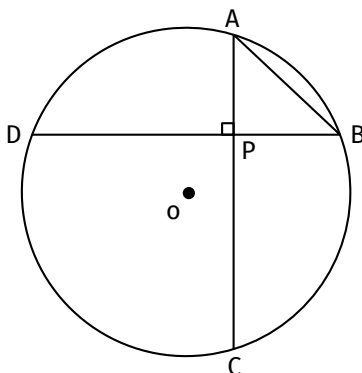
2. Segi empat $POST$ keempat sisinya menyinggung lingkaran Y . Jika panjang $\overline{TS} = 12$ cm dan panjang $\overline{PC} = 14$ cm, tentukan keliling $POST$.



3. Pada lingkaran A yang berjari-jari 5 cm terdapat tali busur $\overline{BC}$ sepanjang 8 cm. Tentukan panjang apotema AD .

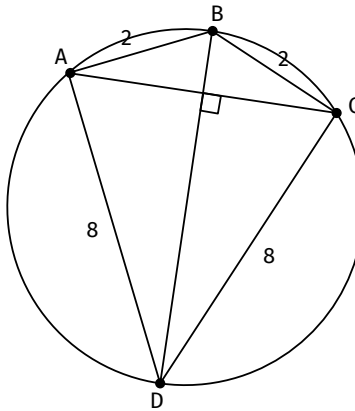


4. Dua tali busur, $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ pada lingkaran dengan pusat O , berpotongan tegak lurus pada titik P . Panjang AB sama dengan jari-jari lingkaran.
- Berapa besar $\widehat{AB}$?
 - Berapa nilai perbandingan $\frac{DC}{AB}$? Jelaskan bagaimana kamu mendapatkan jawabannya.

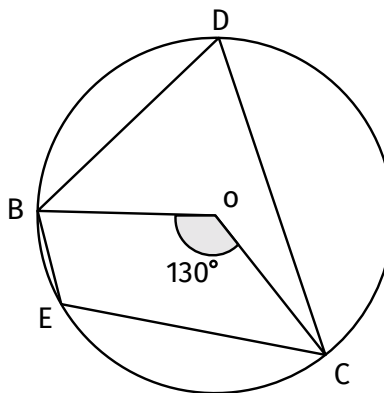


5. Berapa panjang dari tali busur $\overline{AC}$?

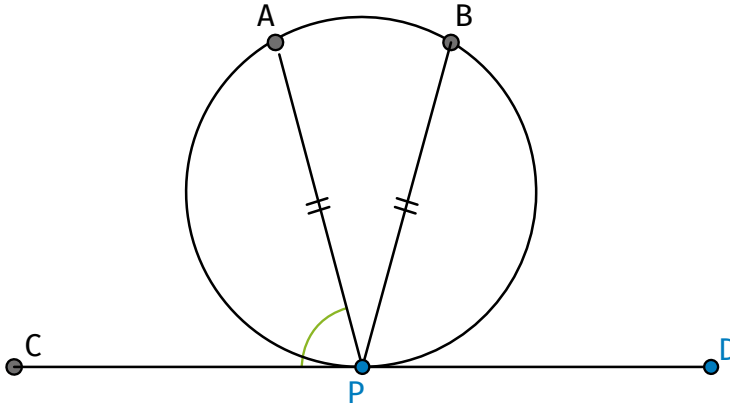
- a. $\frac{16\sqrt{17}}{17}$
- b. $\sqrt{68}$
- c. $\sqrt{32}$
- d. $\frac{\sqrt{32}}{68}$



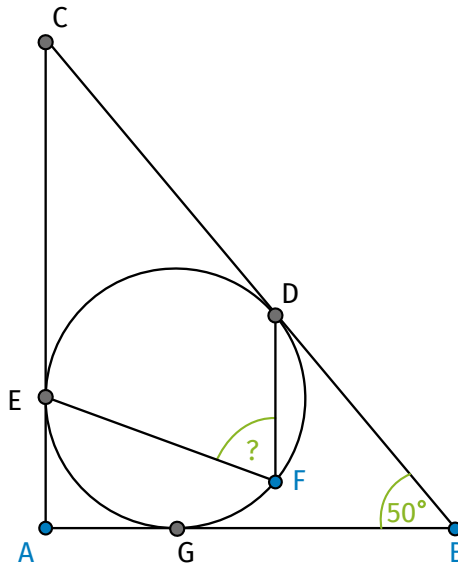
6. Segi empat $BDCE$ adalah segi empat tali busur, O adalah titik pusat lingkaran, dan besar $\angle BOC = 130^\circ$. Tentukan besar $\angle BEC$.



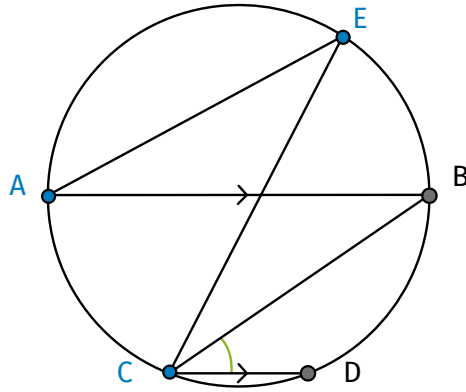
7. CD menyinggung lingkaran di titik P . Jika $AP = BP$ dan $\widehat{AB} = 60^\circ$, tentukan besarnya $\angle APC$.



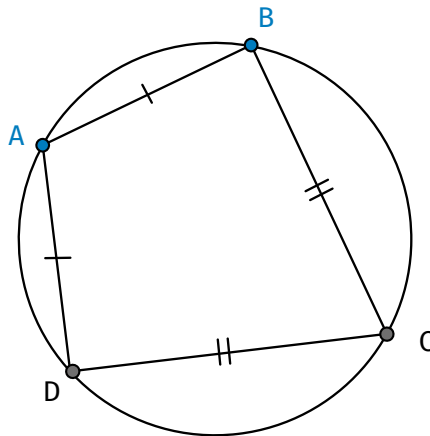
8. Diketahui $\triangle ABC$ siku-siku di A dan $\angle B = 50^\circ$. Lingkaran dalam segitiga menyinggung AB , AC , dan BC berturut-turut di G , E , dan D . Titik F terletak di sembarang tempat pada busur DG . Tentukan besar $\angle EFD$.



9. Diketahui garis AB sejajar dengan garis CD ; $\angle DCB = 35^\circ$. Tentukan besarnya $\angle AEC$.



10. Diketahui $AB = AD$ dan $BC = DC$. Buktikan bahwa AC adalah diameter.



Pengayaan

Gambar 4.10 menunjukkan segitiga sama sisi ABC . Titik P terletak pada lingkaran luar segitiga ABC . Titik P dihubungkan dengan setiap titik sudut segitiga ABC .

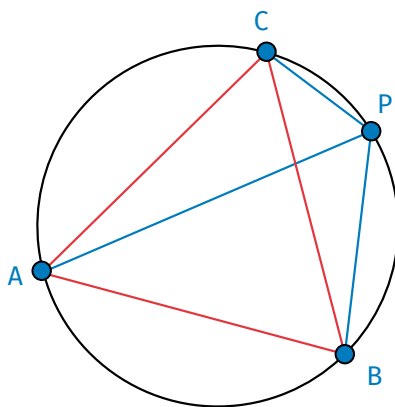
Jika AP lebih panjang daripada BP dan CP ,
buktikan bahwa:

$$AP = BP + CP$$



Petunjuk

Tinjau segi empat $ABPC$



Gambar 4.10 Segitiga sama sisi ABC

Sifat ini pertama kali ditemukan oleh matematikawan Belanda bernama Frans van Schooten, karena itu disebut sebagai **Teorema van Schooten**.

Indeks

B

bijektif 109, 111, 112, 115, 116, 118, 128

busur lingkaran 178, 186, 195, 208

D

data bivariat 2, 11, 13, 17, 19, 22, 29, 40, 55, 56, 73

diagram pencar 4, 11, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 62, 63, 64, 65, 67, 68, 69, 71, 75, 76, 78, 80

diameter 7, 59, 99, 188, 189, 191, 193, 195, 207, 210, 211, 213, 217

domain 84, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 94, 95, 96, 98, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 112, 116, 165, 119, 120, 122, 123, 124, 126, 128, 128

E

eksponensial 96, 112, 115, 131, 160, 164, 167, 170

ekstrapolasi 53, 68, 72

F

fungsi 5, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129,

130, 131, 134, 135, 136, 138, 139, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 128, 176

fungsi invers 82, 84, 109, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128

G

garis best-fit 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 63, 64

garis singgung 178, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 211, 212, 213

I

Injektif 109, 111, 115

interpolasi 52, 53, 67, 72

J

jari-jari 102, 127, 181, 186, 188, 191, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 214

K

kodomain 84, 87, 88, 102, 112, 122, 128

koefisien korelasi 46, 72, 74, 77, 78, 79, 80

komposisi fungsi 82, 84, 88, 101,
102, 103, 105, 106, 108, 118, 119
korelasi 2, 36, 42, 43, 44, 45, 46, 47,
48, 50, 54, 55, 63, 72, 74, 75, 77,
78, 79, 80

Korelasi Product Moment 72, 73
kuadrat 65, 66, 72, 73, 96, 114, 115,
126, 131, 152, 167, 168

L

linear 2, 36, 42, 44, 49, 50, 52, 56, 58,
63, 64, 65, 67, 68, 69, 70, 75, 126,
131, 152, 162, 164, 167

lingkaran 102, 177, 178, 179, 180,
181, 182, 184, 185, 186, 187, 188,
189, 190, 191, 193, 194, 195, 197,
198, 199, 200, 201, 202, 203, 204,
206, 207, 208, 209, 210, 211, 212,
213, 214, 215, 216, 218

P

pemampatan 130, 131, 158, 162,
164, 165, 166, 168, 171, 176

Pemodelan 166

pencermian 124, 130, 131, 144,
145, 146, 147, 148, 149, 150, 153,
156, 158, 162, 164, 166, 167

peregangan 130, 131, 158, 162, 164,
165, 166, 168, 171, 173

pergeseran 130, 131, 132, 136, 139,
141, 142, 143, 144, 150, 155, 158,
162, 166, 167, 168, 173, 174

R

range 84, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92,
94, 95, 96, 98, 100, 101, 103, 104,

105, 106, 107, 112, 116, 120, 122,
123, 128

regresi linear 52, 65, 69, 70

relasi 83, 84, 85, 86, 108, 109, 111,
112, 113, 114, 115, 116, 118, 125

S

sebab-akibat 2, 24, 29, 46, 47, 50, 59
segi empat tali busur 208, 209, 212,
213, 215

sudut keliling 178, 186, 187, 189,
191, 195

Sudut Pusat 184

T

tali busur 178, 186, 206, 207, 208,
209, 210, 211, 212, 213, 214, 215

Teorema Ptolemeus 209, 212

teorema Thales 198

Tes Garis Vertikal 85, 86

transformasi 130, 131, 142, 144, 164,
165, 166, 167, 171, 172, 173, 174,
175, 176

tren 42, 43, 44, 45, 47, 48, 50, 54, 58,
74, 76

Glosarium

apotema	jarak dari pusat lingkaran ke tali busur
busur lingkaran	bagian dari lingkaran
data bivariat	data yang terdiri atas dua variabel kuantitatif
diameter	ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran yang melalui pusat lingkaran
domain atau daerah asal	himpunan yang memuat nilai-nilai masukan (input) di mana fungsi tersebut terdefinisi
ekstrapolasi	penggunaan hubungan antarvariabel untuk memprediksi nilai yang berada di luar jangkauan data
fungsi	pemetaan setiap anggota himpunan kepada (tepat satu) anggota himpunan yang lain
fungsi bijektif	fungsi di mana setiap anggota himpunan dari daerah asal (domain) tepat mempunyai satu pasangan dari himpunan daerah kawan (kodomain) dan sebaliknya
fungsi injektif	fungsi di mana anggota berbeda dari himpunan daerah asal (domain) mempunyai pasangan yang berbeda dari himpunan daerah kawan (kodomain)
fungsi invers	fungsi di mana pemetaan anggotanya merupakan kebalikan dari pemetaan fungsi aslinya
fungsi surjektif	fungsi di mana anggota himpunan daerah hasil (<i>range</i>) sama dengan anggota himpunan daerah kawan (kodomain)

garis <i>best-fit</i>	garis yang paling mewakili data pada diagram pencar
garis singgung	garis yang menyinggung lingkaran pada tepat satu titik
interpolasi	penggunaan hubungan antarvariabel untuk memprediksi nilai yang berada di dalam jangkauan data
jari-jari	1. jarak setiap titik pada lingkaran dengan pusat lingkaran; 2. ruas garis yang menghubungkan pusat lingkaran dengan salah satu titik pada lingkaran
kodomain atau daerah kawan	himpunan yang memuat nilai-nilai keluaran dari fungsi
koefisien korelasi	ukuran deskriptif numerik dari suatu korelasi
komposisi fungsi	penggabungan dua atau lebih operasi fungsi yang dapat dilakukan dengan syarat tertentu
lingkaran	tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama dari pusat lingkaran
pemampatan	transformasi fungsi yang dimampatkan
pemodelan	membuat model matematika dari situasi nyata
pencerminan	transformasi fungsi yang menghasilkan fungsi yang simetris dengan fungsi awal, simetris terhadap cermin
peregangan	transformasi fungsi yang menghasilkan fungsi yang diregangkan
pergeseran	transformasi fungsi yang menggeser fungsi awal sesuai besar dan arah tertentu

range atau daerah hasil	himpunan yang memuat nilai-nilai keluaran yang berpasangan dengan nilai-nilai masukan
regresi linear	model regresi yang memberikan hubungan garis lurus antara dua variabel
relasi	hubungan antara anggota sebuah himpunan dengan anggota dari himpunan lainnya
residu	selisih antara nilai variabel dependen yang diamati dan nilai variabel dependen yang diprediksi
segi empat tali busur	segi empat yang keempat sudutnya terletak pada lingkaran
sudut pusat	sudut yang titik sudutnya terletak pada pusat lingkaran dan kaki-kaki sudutnya adalah jari-jari lingkaran
sudut keliling	sudut yang titik sudutnya terletak pada lingkaran dan kaki-kaki sudutnya berupa tali busur
tali busur	ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran
teorema Ptolemeus	pada segi empat tali busur, hasil kali diagonal sama besarnya dengan jumlah dari hasil kali sisi yang berhadapan
teorema Thales	sudut keliling yang menghadap pada diameter lingkaran adalah sudut siku-siku
tes garis horizontal	merupakan salah satu cara menentukan apakah sebuah fungsi mempunyai fungsi invers dengan menggeser garis horizontal dari atas ke bawah (atau sebaliknya) dan melihat jumlah titik potong yang dihasilkan

tes garis vertikal	salah satu cara menentukan apakah sebuah relasi merupakan fungsi melalui grafiknya; cukup dengan menggeser garis vertikal dari kanan ke kiri (atau sebaliknya) dan melihat jumlah titik potong yang dihasilkan
titik singgung	titik tempat lingkaran bersinggungan dengan garis singgung
transformasi	mengubah suatu fungsi menjadi fungsi lain dengan aturan tertentu
variabel dependen	variabel yang nilainya dipengaruhi oleh variabel independen
variabel independen	variabel yang akan digunakan untuk membuat prediksi terhadap nilai variabel dependen

Daftar Pustaka

- Core-Plus Mathematics. *Contemporary Mathematics in Context: Course 3 Student Edition*. McGraw-Hill. 2009.
- Libby, Jim. *Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry*. McFarland, 2017.
- Kime, L.A., Clark, J., dan Michael, B.K. *Fifth Edition: Explorations in College Algebra*. John Wiley & Sons. 2011.
- Mann, P.S. *Introductory Statistics (Eighth Edition)*. John Wiley & Sons. 2013.
- McClave, J.T., & Sincich, T. *Statistics (Twelfth Edition)*. Pearson Education, Inc. 2013.
- Murdock, J., Kamischke, E., & Kamischke, E. *Discovery Advanced Algebra*. Key Curriculum Press. 2004.
- Peck, R., Olsen, C., & Devore, J.L. *Introduction to Statistics & Data Analysis (Fifth Edition)*. Cengage Learning. 2016.
- Pritchard, C. (Ed.). *The Changing Shape of Geometry: Celebrating a Century of Geometry and Geometry Teaching*. Cambridge University Press. 2003.
- Serra, M. *Discovering Geometry: an Investigative Approach*. Key Curriculum Press. 2008.
- Skrakowski, J., Smith, H., et al. *Pearson Edexcel International A Level Statistics 1 (Student Book)*. Pearson Education Limited. 2019.
- Watkins, A.E, Scheaffer, R.L., & Cobb, G.W. *Statistics in Action: Understanding a Word of Data (Second Edition)*. Key Curriculum Press. 2008. <https://sikapiuangmu.ojk.go.id/FrontEnd/CMS/Article/20649>

Daftar Sumber Data

<https://www.sciencedirect.com/topics/earth-and-planetary-sciences/solareclipse>. Diakses tanggal 22 Oktober 2021 pukul 13.00 WIB.

<https://tubularinsights.com/youtube-35-hours-minute/>. Diakses tanggal 22 Oktober 2021 pukul 14.05 WIB.

http://flysight.ca/wiki/index.php/Geometric_vs._Barometric_Altitude. Diakses tanggal 22 Oktober 2021 pukul 14.30 WIB.

<https://ourworldindata.org/mammals>. Diakses tanggal 24 Oktober 2021 pukul 11.00 WIB.

<https://www.bi.go.id/id/statistik/indikator/data-inflasi.aspx>. Diakses tanggal 25 Oktober pukul 10.00 WIB.

Daftar Sumber Gambar

https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Pearson. Diunduh tanggal 20 Oktober 2021 pukul 14.34 WIB.

<https://id.wikipedia.org/wiki/Thales>. Diunduh tanggal 20 Oktober 2021 pukul 16.05 WIB.

<http://brainden.com/face-illusions.htm>. Diunduh tanggal 21 Oktober 2021 pukul 13.30 WIB.

Biodata Pelaku Perbukuan _____

Biodata Penulis 1

Nama Lengkap : Dicky Susanto, Ed.D
E-mail : dicky.susanto@calvin.ac.id
Alamat Kantor : Menara Calvin Lt. 8, RMCI.
Jl. Industri Blok B14 Kav. 1
Kemayoran, Jakarta Pusat
10610, Indonesia
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Head of Instructional Design dan Dosen, Calvin Institute of Technology (2019–sekarang)
2. Head of Instructional Design dan Dosen, Indonesia International Institute of Life Sciences (2016–2019)
3. Education Consultant, Curriculum Developer and Teacher Trainer (2015–sekarang)
4. Postdoctoral Research Associate, North Carolina State University (2012–2014)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S-3: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2004–2009)
2. S-2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2002–2003)
3. S-1: Program Studi Teknik Kimia, Institut Teknologi Indonesia, Tangerang (1992–1997)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Dicky Susanto, dkk. (2021), Matematika untuk SMA/SMK Kelas X, Kemdikbud, Jakarta.
2. Direktorat SMP (2021), Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Direktorat SMP (2021), Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK, dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
4. Pengarah Materi untuk Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Kelas Awal (Modul Belajar Siswa, Modul Guru, dan Modul Orang Tua) (2020–2021).

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. “Coordinating Multiple Composite Units as a Conceptual Principle in Time Learning Trajectory” (2020)

Biodata Penulis 2

Nama Lengkap : Savitri Sihombing, M.Sc.
E-mail : savitri.sihombing@gmail.com
Alamat Kantor : Yayasan Sinergi Mencerdaskan
Tunas Negeri Jalan Scientia
Boulevard Barat Blok DRWB
No. 8 Sektor Ruko Darwin,
Summarecon Serpong
Tangerang, Banten 15334
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Tim Akademik Matematika, Yayasan Sinergi Mencerdaskan Tunas Negeri (2017–sekarang) Head of Instructional Design dan Dosen, Indonesia International Institute of Life Sciences (2016–2019)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S-2: Program Studi Pascasarjana Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, The Netherlands (2003–2005)
2. S-1: Program Studi Teknik Elektro, Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia (1996–2001)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Dicky Susanto dkk. (2023), *Matematika untuk SMA/SMK/MA/MAK Kelas X (edisi Revisi)*, Kemdikbud, Jakarta.
2. Dicky Susanto, dkk. (2022), *Matematika untuk SD Kelas VI*, Kemdikbud, Jakarta.
3. Dicky Susanto dkk. (2022), *Matematika untuk SMP Kelas VII*, Kemdikbud, Jakarta.
4. Dicky Susanto, dkk. (2021), *Matematika untuk SMA/SMK Kelas XI*, Kemdikbud, Jakarta.

5. Dicky Susanto dkk. (2021), *Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*, Kemdikbud, Jakarta.
6. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
7. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK, dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1 Subtema 2*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Subtema 2, Tema 2 Subtema 3, dan Tema 3 Subtema 2*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
10. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Subtema 2, Tema 2 Subtema 3, Tema 3 Subtema 2, Tema 4 Subtema 2, Tema 5 Subtema 2, Tema 6 Subtema 2, Tema 7 Subtema 2, Tema 8 Subtema 2, Tema 9 Subtema 2*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Tidak ada

Biodata Penulis 3

Nama Lengkap : Marianna Magdalena
Radjawane, M.Si.
E-mail : radjawane@gmail.com
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika dan
IPAC



Riwayat Pekerjaan/Profesi (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Dosen Jarak Jauh STKIP Terang Bangsa Timika (2020–sekarang)
2. Konsultan Pendidikan, Pengembang Kurikulum dan Pelatih Guru (2013–sekarang)
3. Guru Fisika SMA Cita Buana Jakarta (2013–2015)
4. Divisi Pelatihan Guru Surya Institute (2011–2013)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S-2: Program Studi Pascasarjana Fisika, Institut Teknologi Bandung (1990–1993)
2. S-1: Program Studi Astronomi, Institut Teknologi Bandung (1983–1989)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Dicky Susanto dkk. (2021), *Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*, Kemdikbud, Jakarta.
2. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Menguatkan Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
3. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Menguatkan Numerasi Pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK, dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
4. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul*

Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 3 Pancasila Subtema 3 Kesehatan Pancasila, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

5. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Subtema 3, Tema 2 Subtema 2, Tema 3 Subtema 3, Tema 4 Subtema 3, Tema 5 Subtema 3, Tema 6 Subtema 3, Tema 7 Subtema 3, Tema 8 Subtema 3, dan Tema 9 Subtema 3, Modul, Kemdikbud, Jakarta.*
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Subtema 3, Tema 2 Subtema 2, Tema 3 Subtema 3, Tema 4 Subtema 3, Tema 5 Subtema 3, Tema 6 Subtema 3, Tema 7 Subtema 3, Tema 8 Subtema 3, dan Tema 9 Subtema 3, Modul, Kemdikbud, Jakarta.*
7. *Contributor in Excel in Science Grade 4*, Oxford University Press (2018)
8. *Science Gasing Kelas 3-6*, Penerbit Kandel (2013)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Tidak ada

Biodata Penulis 4

Nama Lengkap : Yulian Candra
E-mail : yulian.candra@santa-laurensia.sch.id
Alamat Kantor : Sutera Utama No.1, Alam
Sutera, Serpong Utara, Kota
Tangerang Selatan, Banten,
15325
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Wakil Kepala Sekolah (Administrasi), SMA Santa Laurensia (2022–sekarang)
2. Senior High School Mathematics Supervisor, SMA Santa Laurensia (2017–2022)
3. Head of Mathematics and Science Department, UPH College (2013–2017)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. Non-gelar: Program Teacher Training – MEXT, Master's Program in Education, University of Tsukuba, Japan (2019–2021)
2. S-1: Teachers College, Pendidikan Matematika, Universitas Pelita Harapan (2008–2012)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Dicky Susanto, dkk. (2022), *Matematika untuk SMP Kelas VII*, Kemdikbud, Jakarta.
2. Dicky Susanto, dkk (2021), *Matematika untuk SMA/SMK Kelas XI*, Kemdikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Tidak ada

Biodata Penulis 5

Nama Lengkap : Daniel Sinambela
E-mail : dsf25@umsystem.edu
Alamat Kantor : 202 Math Sciences Building 810
East Rollins Street Columbia,
MO 65211
Bidang Keahlian : Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Dosen (pengajar) College Algebra, Business Calculus, Calculus 1 and 2, University of Missouri, Columbia, USA (2015–2019)
2. Dosen (pengajar) Ordinary Differential Equations, University of Missouri, Columbia, USA (2020–sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S-3: Program Studi Pascasarjana Matematika Terapan, University of Missouri, Columbia, USA (2018–Sekarang)
2. S-2: Program Studi Pascasarjana Matematika Murni, University of Missouri, Columbia, USA (2015–2018)
3. S-1: Program Studi Matematika Murni, dengan minor di Statistik, University of Missouri, Columbia, USA (2012–2015)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Dicky Susanto, dkk (2021), *Matematika untuk SMA/SMK Kelas XI*, Kemdikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. “Asymptotic Properties of Deep Water Solitary Waves with Compactly Supported Vorticity” (2018) <https://mospace.umsystem.edu/xmlui/handle/10355/66212>

2. “Large-amplitude Solitary Waves in Two-layer Density Stratified Water” (2020) to appear on SIAM journal on Mathematical Analysis <https://arxiv.org/pdf/2012.00142.pdf>
3. “Orbital stability of Solitary waves in two-layered stratified water with constant vorticity” (ongoing)

Biodata Penelaah 1

Nama Lengkap : Prof. Dr. Widowati, S.Si., M.Si.
E-mail : widowati.math@gmail.com
Alamat Kantor : FSM, Universitas Diponegoro,
Jl. Prof. H. Soedharto, S.H.,
Tembalang, Semarang
Bidang Keahlian : Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Dosen Tetap Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang (1994–sekarang)
2. Ketua Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Diponegoro, Semarang (2008–2011)
3. Pembantu Dekan II Fakultas Sains dan Matematika (FSM), Universitas Diponegoro, Semarang (2011–2015)
4. Dekan Fakultas Sains dan Matematika (FSM), Universitas Diponegoro, Semarang (2015–sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S-3: Jurusan Matematika, Institut Teknologi Bandung (ITB), Bandung, lulus tahun 2005
2. S-2: Jurusan Matematika, Institut Teknologi Bandung (ITB), Bandung, lulus tahun 2000
3. S-1: Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro (Undip), Semarang, lulus tahun 1993)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Sistem Kendali Optimal: Teori dan Aplikasinya di Bidang Inventory. 2020. Penerbit Undip Press.
2. Penerapan Teknologi dan Proses Produksi KJABB-IMTA. 2019. Penerbit Undip Press. ISBN; 978-979-097-591-0 B.54

3. Modul Teknik Budidaya Sistem Integrated Multi-Thropic Aquaculture (IMTA). 2019. Penerbit Undip Press. ISBN: 978-979-097-594-1.
4. Metode Kendali Diskret:Teori dan Simulasinya. 2017. Penerbit Undip Press. ISBN: 978-979-097-643-0.
5. Pemodelan Matematika: Analisis dan Aplikasinya. 2013. Penerbit Undip Press. ISBN: 978-602-097-370-8.
6. Kalkulus. 2012. Penerbit Undip Press. ISBN: 978-602-097-329-6. 7. Pemodelan Matematika Berbasis Maple. 2011. Jurusan Matematika FMIPA Undip.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. “Implementation of an Optimal Control for Reducing Individuals Infected by Hepatitis B Virus”. 2021.
2. “Mathematical Modeling and Analysis of Covid-19 Transmission Dynamics in Central Java Province, Indonesia”. 2021.
3. “Investigating the Features of Indonesia Stock Price during Covid-19 Pandemic: An Application of Merton Jump Diffusion Model. 2021.
4. “1d-2d Numerical Model for Wave Attenuation by Mangroves as a Porous Structure”. 2021.
5. “Piecewise Objective Optimisation Model for Inventory Control Integrated with Supplier Selection Considering Discount”. 2021.

Selengkapnya, kunjungi Akun Profil Penelaah:

1. **Scopus ID:** 8255360300
<https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=8255360300>
2. **ORCID iD:** 0000-0002-4372-6501
<https://orcid.org/0000-0002-4372-6501>
3. **Sinta ID:** 6007839
<https://sinta.ristekbrin.go.id/authors/detail?id=6007839&view=overview>
4. **Google Scholar ID:** CczqHJ4AAAAJ
<https://scholar.google.co.id/citations?user=CczqHJ4AAAAJ&hl=id>

Biodata Penelaah 2

Nama Lengkap : Dr. Ali Mahmudi
E-mail : alimahmudi@uny.ac.id
Alamat Kantor : Jalan Colombo No. 1
Karangmalang Yogyakarta
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Dosen FMIPA UNY

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S-1 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sebelas Maret Surakarta lulus tahun 1997
2. S-2 Pendidikan Matematika Program Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya (UNESA) lulus tahun 2003
3. S-3 Pendidikan Matematika Sekolah Pascasarjana Universitas Pendidikan Indonesia (UPI) lulus tahun 2010

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. “Pengembangan Bahan Ajar Matematika dengan Pendekatan Kontekstual untuk Pembelajaran di SMK” (2015).
2. “Pengembangan Bahan Ajar Geometri Berbasis Kontekstual untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah dan Disposisi Matematis” (2017).
3. “Pengembangan Buku Ajar Struktur Aljabar Berbasis Pendekatan Deduktif di Universitas Riau Kepulauan Batam” (2018).
4. “Pengembangan Model *Micro Teaching* untuk Meningkatkan *Pedagogical Content Knowledge* Mahasiswa Calon Guru Matematika” (2018).

5. “Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berbasis Masalah dengan Pendekatan Humanis yang Berorientasi pada Math-Literacy dan Pengelolaan Math-Anxiety Siswa” (2019).
6. “Pengembangan Buku Ajar Geometri Eksploratif Berbasis HOTS” (2020)
7. “Desain Instruksional Berpikir Komputasi dalam Pembelajaran Matematika Realistik” (2021)
8. “The Analysis of the Gakkohtosho’s Mathematics Textbook Using the Cognitive Load Theory Perspective” (2021)

Informasi Lain:

1. Sebagai Penelaah Buku Teks Pelajaran Matematika Kelas IX Kemdikbud Tahun 2014

Biodata Ilustrator

Nama Lengkap : Ahmad Saad Ibrahim
E-mail : baimsaadkv10@gmail.com
Bidang Keahlian : *Creative direction, graphic design, video editing*



Riwayat Pekerjaan/Profesi (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Creative director, graphic designer, video editor

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1 Desain Komunikasi Visual - 2010

Pengalaman Mengilustrasi (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas VI, Kemdikbudristek, 2022
2. Matematika untuk SD/MI Kelas VI, Kemdikbudristek, 2022
3. Matematika untuk SMP/MTs Kelas VII, Kemdikbudristek, 2022

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

4. Tidak ada

Biodata Penyunting Naskah 1

Nama Lengkap : Tri Hartini, S.S.
E-mail : trihartini2703@gmail.com
Bidang Keahlian : Editing buku/naskah, proofread



Riwayat Pekerjaan/Profesi (dalam 10 Tahun Terakhir):

Menjadi editor lepas di beberapa penerbit di Yogyakarta (2000–sekarang) dan telah menyunting berbagai jenis buku, baik naskah asli maupun terjemahan.

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

Fakultas Sastra/Ilmu Budaya Universitas Gadjah Mada Yogyakarta jurusan Sastra Indonesia spesialisasi bidang Linguistik (1992–1998)

Pengalaman Mengedit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. *Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)*, 2023
2. *Pendidikan Pancasila untuk SMP/MTs Kelas VII (Edisi Revisi)*, 2023
3. *Buku Panduan Guru Pendidikan Pancasila untuk SMP/MTs Kelas VII*, 2023
4. *Kumpulan Tulisan Para Guru SMPK Santa Clara Surabaya*, 2023
5. *Kumpulan Artikel Pendek Bank Indonesia*, 2023
6. *Jujur Terhadap Pancasila*, 2022
7. *Penulisan dan Penerbitan Artikel di Jurnal Internasional Bereputasi*, 2022
8. *Menulis Esai Akademis, Buku Ajar Mata Kuliah Umum Bahasa Indonesia*, 2022
9. *Matematika untuk SD/MI Kelas VI*, 2022
10. *Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas VI*, 2022
11. *Matematika untuk SMP/MTs Kelas VII*, 2022
12. *Buku Panduan Guru Matematika untuk SMP/MTs Kelas VII*, 2022

13. *Analisis Model Kurikulum Operasional Satuan Pendidikan*, 2022
 14. *Bahasa Indonesia untuk SD/MI Kelas VI*, 2021
 15. *Buku Panduan Guru Bahasa Indonesia untuk SD/MI Kelas VI*, 2021
 16. *Bahasa Indonesia untuk SMP/MTs Kelas VII*, 2021
 17. *Buku Panduan Guru Bahasa Indonesia untuk SMP/MTs Kelas VII*, 2021
 18. *Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*, 2021
 19. *Matematika untuk SMA/SMK Kelas XI*, 2021
 20. *Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas XI*, 2021
 21. *Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, 2021
 22. *Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK, dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, 2021
 23. *Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Literasi pada Mata Pelajaran Bahasa Indonesia untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, 2021
 24. *Panduan Pengembangan Proyek Penguatan Profil Pelajar Pancasila*, 2021
 25. *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 1–3 Tema 1–9*, 2020
 26. *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 1–3 Tema 1–9*, 2020
 27. *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1–3 Tema 1–9*, 2020
- Biodata Penyunting Naskah

Biodata Penyunting Naskah 2

Nama Lengkap : Maharani Prananingrum, S.Si., M.A

Nama Instansi : Pusat Perbukuan, BSKAP,
Kemdikdasmen

Alamat Instansi : Kompleks Kemdikdasmen Gedung
D Jl. RS. Fatmawati, Cipete Jakarta
Selatan

E-mail : maharaniprananingrum@gmail.
com

Bidang Keahlian : Penyuntingan Naskah,
Pengembang Perbukuan



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. 2005 – sekarang: Pusat Perbukuan Kemdikbudristek

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Matematika di Universitas Pendidikan Indonesia, 1998-2003
2. S2: Psikometrika Terapan di Fakultas Psikologi Universitas Gadjah Mada, 2016-2019

Pengalaman Mengedit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Matematika untuk SD/MI Kelas III, Pusat Perbukuan 2022.
2. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas III, Pusat Perbukuan 2022.
3. Panduan Penyelenggaraan PAUD Berkualitas Seri 9 – Lingkungan Belajar Partisipatif, Direktorat Pendidikan Anak Usia Dini 2022.
4. Buku Panduan Guru Dasar-Dasar Nautika Kapal Niaga untuk SMK/MAK Kelas X, Pusat Perbukuan 2022.
5. Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi), Pusat Perbukuan 2023.

6. Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi), Pusat Perbukuan 2023.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

1. *Kajian Pemanfaatan Buku Guru dalam Proses Pembelajaran untuk Jenjang Sekolah Dasar*, Pusat Perbukuan 2021

Biodata Editor Visual

Nama Lengkap : Nadia Mahatmi
Nama Instansi : Universitas Multimedia
Nusantara
Alamat Instansi : Jl. Scientia Boulevard, Gading
Serpong, Kel. Curug Sangereng,
Kec. Kelapa Dua, Kab.
Tangerang, Prop. Banten 15810
Bidang Keahlian : Ilustrasi



Riwayat Pekerjaan/Profesi (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Dosen Desain Komunikasi Visual – Universitas Multimedia Nusantara (2017 – sekarang)
2. Dosen Desain Komunikasi Visual – Telkom University (2015 – 2017)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. Magister Desain – Institut Teknologi Bandung (2012 – 2015)
2. Sarjana Desain Komunikasi Visual – Institut Teknologi Bandung (2005 – 2009)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Tidak ada

Judul Penelitian dan Tahun Terbit:

1. *Board Game Design to Learn about User Persona in Entrepreneurship Programme* in Kurikulum Merdeka (2023)
2. Ujicoba Buklet Aktivitas Museum Bank Indonesia untuk Siswa Sekolah Menengah (2021)
3. Perancangan *Board Game* Kolaboratif. Studi Kasus: Legenda Gunung Tondoyan (2021)
4. Mascot Design for the Indonesian Pavilion at World Expo 2020 (2020)

5. *Activity Booklet Design for Museum Bank Indonesia for Middle School Students* (2020)

Informasi Lain:

1. Google Scholar <https://scholar.google.com/citations?hl=en&authuser=1&user=QKx9wA4AAAAJ>

Biodata Penata Letak (Desainer)

Nama Lengkap : M. Firdaus Jubaedi
Nama Instansi : Thinkin Studio
Alamat Instansi : Jl. Permai 24 no. 9 Desa
Mekarrahayu Kecamatan
Margaasih Kab. Bandung
E-mail : muhafir@gmail.com
Bidang Keahlian : Desain Grafis, UI/UX Desain



Riwayat Pekerjaan/Profesi (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. *Creative Director*, Thinkin Studio (2019 - sekarang)
2. Konsultan Komunikasi Visual, Ditjen PAUD, Dikdas, dan Dikmen, Kemendikbudristek (2022-2024)
3. Koordinator tim pengolah naskah Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh (2020–2021)
4. Staf pada Pusat Analisis dan Sinkronisasi Kebijakan (PASKA) Kemendikbud (2019–2020)
5. Staf pada Staf Ahli Mendikbud bidang pembangunan karakter (2018–2019)
6. Multimedia Designer, Cita Rasa Prima Indonesia Berjaya (2016–2018)
7. Intern Junior Art Director di Syafa'at Marcomm (2014)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S-1: Desain Komunikasi Visual, Institut Teknologi Nasional Bandung (2011–2016)

Pengalaman Mendesain (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Dicky Susanto dkk. (2023) *Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)*,
2. Dicky Susanto dkk. (2021), *Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*, Kemdikbud, Jakarta.

3. Dicky Susanto dkk. (2021), *Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/ SMK Kelas X*, Kemdikbud, Jakarta.
4. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
5. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK, dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
9. Direktorat Pembinaan PAUD (2019), *Panduan Praktis Penguatan Pendidikan Karakter pada Pendidikan Anak Usia Dini*, Kemendikbud, Jakarta
10. Direktorat Pembinaan PAUD (2019), *Pedoman Penguatan Pendidikan Karakter pada Pendidikan Anak Usia Dini*, Kemendikbud, Jakarta.