



KEMENTERIAN
PENDIDIKAN DASAR
DAN MENENGAH
2025

MATEMATIKA

Edisi Revisi

**Mohammad Tohir
Ahmad Choirul Anam
Ibnu Taufiq
Tista Imam Riyadi**

SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII

Hak Cipta pada Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah Republik Indonesia.

Dilindungi Undang-Undang.

Penafian: Buku ini disiapkan oleh Pemerintah dalam rangka pemenuhan kebutuhan buku Pendidikan yang bermutu, murah, dan merata sesuai dengan amanat dalam UU No. 3 Tahun 2017. Buku ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah. Buku ini merupakan dokumen hidup yang senantiasa diperbaiki, diperbarui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis atau melalui alamat surel buku@kemendikdasmen.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII (Edisi Revisi)

Penulis

Mohammad Tohir
Ahmad Choirul Anam
Ibnu Taufiq
Tista Imam Riyadi

Penelaah

Kenys Fadhilah Zamzam
Nego Linuhung

Penyelia/Penyelaras

Supriyatno
Maharani Prananingrum
Sofia Nida Khoerunnisa
Putri Ainur Islam

Kontributor

Tri Rusdiyono
Siti Lita Fauziyah

Editor

Putri Estikarini
Sofia Nida Khoerunnisa

Editor Visual

M. Firdaus Jubaedi

Ilustrator

Muhammad Yustiadi Akmaludin

Desainer

Erwin

Penerbit

Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah

Dikeluarkan oleh

Pusat Perbukuan
Kompleks Kemendikdasmen, Jalan RS Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
<https://buku.kemendikdasmen.go.id>

Edisi Revisi, 2025

ISBN 978-623-118-557-0 (no.jil.lengkap)
978-634-00-3118-8 (jil.3 PDF)

Isi buku ini menggunakan huruf Noto Serif 10/16 pt, SIL Open Font License & Apache License.
xviii, 198 hlm.: 17,6 × 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah memiliki tugas dan fungsi mengembangkan buku pendidikan pada satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah, termasuk Pendidikan Khusus. Sebagai sumber belajar utama dalam pembelajaran, buku senantiasa menyesuaikan diri dengan arah kebijakan pendidikan dan perkembangan kurikulum dari waktu ke waktu.

Sejalan dengan dinamika tersebut, pemerintah melakukan penyesuaian terhadap buku teks utama agar tetap relevan dan mendukung proses pembelajaran yang bermutu. Buku teks utama yang terdiri atas buku siswa dan panduan guru, disiapkan sebagai sumber belajar utama bagi peserta didik dan menjadi salah satu referensi atau inspirasi bagi guru dalam merancang dan mengembangkan pembelajaran sesuai karakteristik, potensi, dan kebutuhan peserta didik. Keberadaan buku teks utama ini diharapkan, dapat membentuk generasi yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan yang Maha Esa, dan berakhlak mulia; berpengetahuan luas; mandiri; kritis; kreatif; mampu bekerja sama; serta berdaya saing di tingkat nasional maupun global.

Kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berkolaborasi dalam upaya menghadirkan buku teks utama ini. Semoga buku teks utama ini dapat menjadi tonggak perubahan yang menginspirasi, membimbing, dan mengangkat kualitas pendidikan kita ke puncak keunggulan.

Jakarta, Oktober 2025
Kepala Pusat Perbukuan,

Supriyatno, S.Pd., M.A.

Prakata

Puji syukur dipanjatkan ke hadirat Allah SWT., karena hidayah dan inayah-Nya penulisan buku siswa ini dapat diselesaikan sesuai dengan waktu yang telah ditetapkan. Buku Siswa ini disusun sesuai Capaian Pembelajaran Fase F untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII sesuai dengan Keputusan Kepala Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah Nomor 046/H/KR/2025 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Jenjang Pendidikan Dasar, dan Jenjang Pendidikan Menengah.

Buku Siswa ini disusun untuk memenuhi kompetensi keterampilan Kompetensi Keterampilan 4Cs (*Creativity, Critical Thinking, Collaboration, Communication*) dalam pembelajaran abad 21 yang meliputi: kehidupan dan karir; pembelajaran dan inovasi; serta informasi, media, dan teknologi. Oleh karena itu, dalam uraian setiap bab akan mengembangkan kompetensi/keterampilan/sikap peserta didik antara lain: (i) berpikir tingkat tinggi (*HOTS*); (ii) berpikir kritis dan *problem solving*, kreatif dan inovatif, komunikasi, dan kolaborasi; dan (iii) literasi informasi, media, dan teknologi. Untuk mempelajari materi dalam buku ini, peserta didik lebih banyak diberi kesempatan secara aktif terlibat untuk mencari tahu, sedangkan Bapak/Ibu guru akan membantu jika peserta didik mendapatkan hambatan belajar. Untuk mengembangkan keterampilan hidup dan karir, dalam buku disediakan proyek yang harus peserta didik lakukan secara kolaborasi atau mandiri dan hasilnya untuk dikomunikasikan.

Buku ini dibagi menjadi empat bab. Bab 1 tentang Barisan dan Deret, memuat: Barisan Aritmetika, Barisan Geometri, Deret Aritmetika, Deret Geometri, dan Bunga Tunggal. Bab 2 tentang Investasi dan Pinjaman, memuat: Suku Bunga Tunggal, Investasi Bunga Majemuk, Investasi Anuitas, Pinjaman Bunga Majemuk, Pinjaman Dengan Anuitas, Parameter Suku Bunga, dan Parameter Periode Pembayaran. Bab 3 tentang Kaidah Pencacahan, memuat: Aturan Pengisian Tempat, Permutasi, Kombinasi, dan Penerapan Permutasi dan Kombinasi. Bab 4 tentang Peluang, memuat: Peluang Suatu Kejadian, Peluang Kejadian Majemuk Saling lepas, Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas, dan Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas Bersyarat.

Terima kasih disampaikan kepada Kepala Pusat Perbukuan Kementerian Pendidikan Dasar dan Menengah Republik Indonesia yang telah memfasilitasi Tim Penulis untuk memperlancar tersusunnya buku ini. Para penulis juga menghaturkan ucapan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu mewujudkan buku ini, khususnya para penelaah, yaitu Dr. Nego Linuhung, M.Pd. (Universitas Muhammadiyah Metro, Lampung) dan Dr. Kenys Fadhillah Zamzam, S.Si., M.Pd (Universitas Insan Budi Utomo Malang) atas segala masukan dan bimbingannya yang sangat berharga dari draf awal, proses penulisan buku, hingga buku ini diterbitkan.

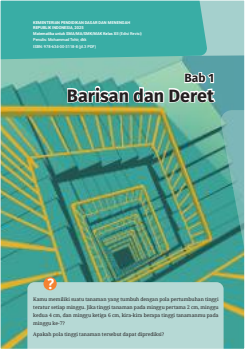
Kami menyadari kekurangan buku ini. Oleh karena itu, saran dan kritik untuk memperbaiki buku ini sangat diharapkan dari semua pihak. Semoga buku ini bermanfaat bagi pembelajaran secara umum dan khususnya pada pembelajaran matematika di SMA/MA//SMK/MAK.

Jakarta, Oktober 2025

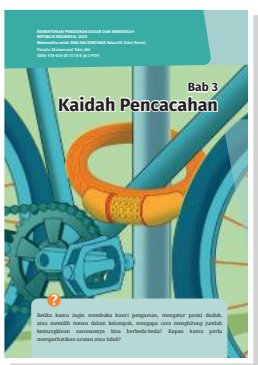
Tim Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar	iii
Prakata	iv
Daftar Isi	vi
Daftar Gambar	viii
Daftar Tabel	x
Petunjuk Penggunaan Buku	xi

Bab 1	Barisan dan Deret	1
	A. Barisan	3
	1. Barisan Aritmetika	3
	2. Barisan Geometri	11
	B. Deret	19
	1. Deret Aritmetika	20
	2. Deret Geometri	25
	3. Deret Geometri Tak Hingga	28
	C. Bunga Tunggal	30

Bab 2	Investasi dan Pinjaman	35
	A. Suku Bunga Tunggal	37
	B. Investasi Bunga Majemuk	40
	C. Investasi Anuitas	45
	D. Pinjaman Bunga Majemuk	55
	E. Pinjaman dengan Anuitas	59
	F. Parameter Investasi dan Pinjaman	71



A. Aturan Pengisian Tempat	83
B. Permutasi	91
1. Permutasi n Item dari n objek	93
2. Permutasi dengan Objek yang Sama	95
3. Permutasi Siklis	97
C. Kombinasi	102
D. Penerapan Permutasi dan Kombinasi	113



A. Peluang Suatu Kejadian	125
1. Ruang Sampel	132
2. Peluang Suatu Kejadian	132
B. Peluang Kejadian Majemuk	138
1. Kejadian Majemuk	140
2. Frekuensi Harapan dari Kejadian Majemuk	141
3. Peluang Kejadian Majemuk	142
4. Peluang Kejadian Majemuk Saling Lepas	144
5. Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas	151
6. Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas Bersyarat	158

Glosarium	172
Daftar Pustaka	178
Indeks	182
Profil Pelaku Perbukuan	184

Daftar Gambar

Gambar 1.1	Susunan Kursi	3
Gambar 1.2	Susunan Bola	3
Gambar 1.3	Susunan Mangkok	4
Gambar 1.4	Susunan Batu Bata Bertingkat	6
Gambar 1.5	Menjatuhkan Bola dari Balkon Rumah	11
Gambar 1.6	Pilar-Pilar Kuno	17
Gambar 1.7	Carl Friedrich Gauss	20
Gambar 2.1	Koperasi Simpan Pinjam	37
Gambar 2.2	Deposito	40
Gambar 2.3	Menabung di Bank	46
Gambar 2.4	Leonardo da Pisa	61
Gambar 2.5	Grafik Angsuran Pokok dan Bunga Angsuran	62
Gambar 2.6	Grafik Hubungan Suku Bunga dengan Dana	72
Gambar 2.7	Grafik Hubungan Periode Pembayaran dengan Nilai Akhir	74
Gambar 3.1	Susunan Buku di Rak	83
Gambar 3.2	Barcode UPC (<i>Universal Product Code</i>)	88
Gambar 3.3	Struktur Pengurus Kelas	91
Gambar 3.4	Denah Perumahan Bunga Indah	95
Gambar 3.5	Posisi duduk melingkar pada meja bundar.	97
Gambar 3.6	Bagan Pemain Futsal	102
Gambar 3.7	Ahmad dan Keranjang Buah	106
Gambar 4.1	Blaise Pascal (1623–1662 M)	126
Gambar 4.2	Dua Anak Menggunakan Komputer	127
Gambar 4.3	Koin Uang Logam	128
Gambar 4.4	Tiga Kelereng	128
Gambar 4.5	Dadu Bilangan	128
Gambar 4.6	Dua Koin Uang Logam	132

Gambar 4.7	Kelereng dalam Kotak	133
Gambar 4.8	Permainan <i>Spin</i>	138
Gambar 4.9	Satu Set Dadu dan Koin	139
Gambar 4.10	Koin dan Dadu	141
Gambar 4.11	Telepon Berdering	144
Gambar 4.12	Pelemparan <i>Fastball</i>	145
Gambar 4.13	Keranjang Apel	147
Gambar 4.14	Tiga Kelereng dan Kantong	151
Gambar 4.15	Dua Dadu	153
Gambar 4.16	Pintu Rahasia	158
Gambar 4.17	Peluang Langkah 2A dan Langkah 2B	159
Gambar 4.18	Kumpulan Kartu	159

Daftar Tabel

Tabel 1.1	Banyak Susunan Mangkok	4
Tabel 1.2	Banyak Lipatan dan Bagian Sama Besar yang Terbentuk Pada Kertas	12
Tabel 1.3	Banyak Rumah Tangga yang Membuang Sampah dalam 5 Bulan ..	25
Tabel 1.4	Proses Menganalisis Rumus Jumlah Deret Geometri	26
Tabel 1.5	Perhitungan Nilai Tabungan Angga	31
Tabel 2.1	Perhitungan Bunga Tunggal	41
Tabel 2.2	Perhitungan Bunga Majemuk	42
Tabel 2.3	Perincian Tabungan Deposito Affan	47
Tabel 2.4	Kegiatan Anuitas	48
Tabel 2.5	Angsuran Pinjaman	56
Tabel 2.6	Tabel Angsuran Pak Andi per Bulan	58
Tabel 2.7	Mekanisme Pembayaran Anuitas	60
Tabel 2.8	Rencana Pelunasan	62
Tabel 2.9	Rencana Pelunasan	63
Tabel 2.10	Bunga Majemuk KPR	69
Tabel 3.1	Pengelompokan Kriteria Buku	83
Tabel 3.2	Pasangan Kemeja dan Celana	85
Tabel 3.3	Banyak Cara Susunan Pengurus	92
Tabel 3.4	Kemungkinan Pilihan Buah	107
Tabel 4.1	Hasil Percobaan Koin	129
Tabel 4.2	Hasil Percobaan Kelereng	129
Tabel 4.3	Hasil Percobaan Dadu	130
Tabel 4.4	Pelemparan Satu Koin dan Satu Set Dadu	139
Tabel 4.5	Formasi Manajer	162

Petunjuk Penggunaan Buku

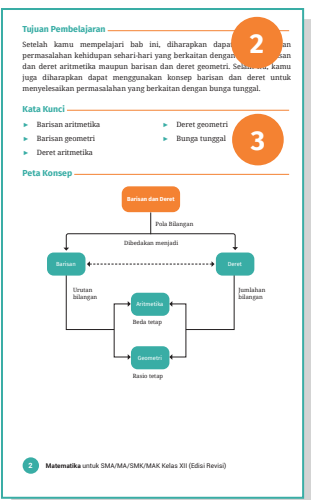


1. Pertanyaan Pemantik

Bagian ini terletak pada awal bab. Pertanyaan pemantik merupakan pertanyaan yang menuntun pemahaman materi dan pengembangannya sepanjang pembelajaran bab tersebut. Kamu akan menemukan kedalaman dan keluasan dari materi bab tersebut melalui pertanyaan pemantik.

2. Tujuan Pembelajaran

Tujuan pembelajaran terdapat pada bagian awal bab sebagai panduan dalam memahami kompetensi yang harus kamu kuasai. Tujuan pembelajaran membantumu untuk memonitor perkembangan belajarnya yang akan dihubungkan dengan refleksi pada akhir pembelajaran.

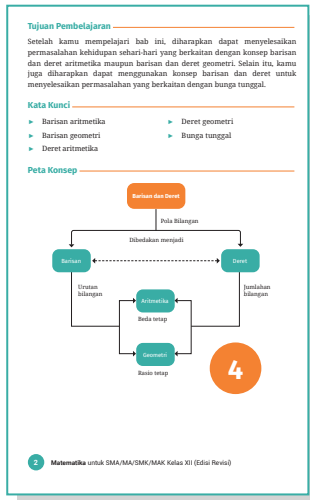


3. Kata Kunci

Kata atau konsep yang merupakan kunci untuk dihubungkan dengan kata atau konsep lain. Pemahaman terhadap kata kunci memudahkanmu untuk mengaitkan konsep yang satu dengan konsep lainnya.

4. Peta Konsep

Peta konsep memberikan gambaran bab secara umum. Peta konsep merupakan diagram yang menggambarkan hubungan yang bermakna antarkonsep dalam bab tersebut. Dengan adanya peta konsep ini diharapkan kamu memiliki gambaran utuh tentang hubungan konsep yang ada.



5. Ayo, Mengingat Kembali

Kamu diharapkan aktif dalam mengingat kembali materi prasyarat sebagai bekal awal untuk mempelajari materi yang akan dipelajari. Tujuan kegiatan ini untuk membantu peserta didik mengingat kembali terhadap materi sebelumnya yang berkaitan dengan materi yang akan dipelajari. Dengan demikian, peserta didik akan lebih mudah memahami materi baru. Kegiatan ini menuntut peserta didik terbiasa berpikir reflektif dalam membangun kepercayaan diri selama proses belajar mengajar.

A. Suku Bunga Tunggal

Ayo, Mengingat Kembali

Masyarakat Indonesia tentu sudah tidak asing dengan koperasi, dalam kehidupan sehari-hari, bahkan ketika kamu sedang berinteraksi dengan koperasi. Koperasi merupakan suatu wadah atau sarana perputaran kegiatan ekonomi di masyarakat. Salah satu jenis koperasi yang umum ialah koperasi simpan pinjam. Koperasi simpan pinjam yang sudah dikenal ini, biasanya menggunakan bunga tunggal sebagai metode dalam transaksi pembiayaan. Bunga tunggal merupakan imbalan yang diberikan oleh koperasi kepada nasabah dalam periode tertentu secara tunggal. Selain koperasi, juga terdapat lembaga keuangan lainnya, seperti bank, yang juga menjadi bagian dari perputaran ekonomi masyarakat.

Suku bunga dapat diartikan sebagai balas jasa yang diberikan nasabah kepada bank atas peninjaman uang dari bank atau balas jasa yang diberikan pihak bank kepada nasabah atas penyimpanan uang di bank.

Gambar 2.1 Koperasi Simpan Pinjam

Ayo, Bereksplorasi

- Berpartisipasilah dengan temanmu untuk menyelesaikan kedua masalah (Masalah A dan Masalah B) tentang bunga tunggal.
- Tentukan bersama-sama data yang diketahui dari masing-masing soal, seperti modal awal, persentase bunga, dan lama waktu penyimpanan.
- Lengkapilah langkah-langkah perhitungan bunga tunggal sesuai rumus: $B = M \times p\% \times n$

6

Bab 2 | Investasi dan Pinjaman 27

6. Ayo, Bereksplorasi

Dalam kegiatan Ayo Bereksplorasi, peserta didik diharapkan aktif dalam mencari informasi suatu pengetahuan atau konsep, teknik baru, metode dan rumus baru, atau

Ayo, Berpikir Kreatif

Misal kamu sedang melakukan aktivitas untuk menyelesaikan tugas kokurikuler. Aktivitas tersebut dilaksanakan dengan menjelajahi makam situs kuno yang memiliki deretan pilar-pilar misterius. Pilar pertama tampak tinggi biasa saja. Namun, pilar kedua terlihat dua kali lebih tinggi dari pilar pertama, pilar ketiga empat kali lebih tinggi dari yang pertama, dan seterusnya. Kamu mulai bertanya-tanya, apakah ada pola tersembunyi di balik tinggi pilar-pilar ini? Tiba-tiba, kamu menemukan gulungan kuno yang berisikan bahwa siapa pun yang mampu menebak tinggi pilar ke-10 akan menemukan harta karun tersembunyi. Bersama kelompokmu, kamu diminta menyusun catatan pengamatan dan menyimpulkan hubungan antartinggi pilar. Apakah kamu dapat menemukan pola pengali tetap yang digunakan? Apa yang terjadi jika kamu ubah tinggi pilar pertama? Bagaimana jika pola ini diteruskan hingga pilar ke-5 atau ke-8?

Ayo, Berpikir Kritis

Seorang siswa menyatakan bahwa pada barisan $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ yang lebih besar dari satu akan menyebabkan setiap suku $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ besar, sedangkan rasio antara nol dan satu akan membuat $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ semakin mengecil. Tinjau kembali pendapat tersebut dengan mempertimbangkan berbagai kemungkinan nilai awal dan tanda rasio. Sajikan contoh maupun lawan contoh, lalu jelaskan keteraturan perubahan suku secara logis.

Bab 1 | Barisan dan Deret 17

Gunakan persamaan 1, lalu substitusi nilai $b = 5.000$, diperoleh

$$a + 4b = 70.000$$

$$a + 4(5.000) = 70.000$$

$$a + 20.000 = 70.000$$

$$a = 70.000 - 20.000$$

$$a = 50.000$$

a adalah suku pertama

Jadi, uang yang disumbang Rudi untuk pertama kalinya adalah Rp50.000,00.

Ayo, Berpikir Kreatif

Coba kamu temukan alternatif penyelesaian yang lain, jika Rudi disumbang pertama kali oleh Rudi ditimbang menggunakan pengalihan 2, apakah hasilnya sama? Bagaimana jika kamu diminta menentukan jumlah tabung setelah satu tahun pertama dan setelah bulan ke-17?

Latihan 13

- Tuliskan dua suku berikutnya dari barisan bilangan di bawah ini.

Barisan bilangan	Suku berikutnya
12, 10, 8, 6, ...	-4, 0
..., 7, 12, 18, 25, ...	4, 2
-16, -12, -8, ...	3, 33
..., ..., 4, -2, -10, -20, ...	-4, -7
	10, 8
- Tentukan suku ke-100 dari barisan berikut: 6, -1, -8, -15, ...
- Jika diketahui barisan aritmetika dengan suku ke-3 = -40 dan suku ke-8 = 2. Tentukan suku pertama, beda, serta rumus suku ke- n dari barisan tersebut.
- Setiap minggu, Ibu Rina mengumpulkan 8 botol plastik bekas untuk didaur ulang. Setiap kali pengumpulan, jumlah total botol plastik yang telah terkumpul dicatat oleh petugas bank sampah di lingkungannya.

10 Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII (Edisi Revisi)

menyelidiki pola hubungan antarunsur konsep antarbab, sambil berusaha memahaminya. Inti kegiatan eksplorasi adalah pelibatan peserta didik dalam menelaah sesuatu hal baru yang ada di Buku Siswa dengan bimbingan guru. Pengetahuan tersebut mungkin berhubungan dengan materi pelajaran sebelumnya maupun yang benar-benar baru bagi peserta didik.

7. Ayo, Berpikir Kritis

Kamu diajak mencari tahu untuk memahami konsep atau pengetahuan baru melalui penemuan terbimbing. Kegiatan ini perlu dilatih terus-menerus agar kamu memiliki kemampuan berpikir kritis yang terlatih untuk membangun pengetahuannya.

8. Ayo, Berpikir Kreatif

Kamu diminta untuk mencari, membuat ide, alternatif jawaban, atau solusi dari permasalahan yang ada sebanyak-banyaknya. Bapak/Ibu Guru akan memberikan ruang yang terbuka dengan memberi kesempatan untuk berpikir dengan berbagai macam ide yang muncul.

9. Ayo, Mencoba

Kamu diminta untuk mengerjakan soal latihan, baik secara individu maupun kelompok. Hal ini penting sekali untuk menguji kemampuanmu dalam mengaplikasikan pengetahuan yang diperoleh dalam menyelesaikan permasalahan.

10. Ayo, Berkomunikasi

Kamu akan bertukar pikiran, gagasan, atau ide yang bermanfaat dalam membangun dan memperdalam pengetahuan dalam rangka menyelesaikan permasalahan atau menjawab pertanyaan.

11. Petunjuk

Kamu akan memperoleh petunjuk dan langkah-langkah untuk memecahkan masalah. Bentuk dari kegiatan ini ada banyak variasi tergantung pada kebutuhan dan jenis permasalahan yang ada.

12. Tahukah Kalian?

Dalam kegiatan Tahukah Kalian, kamu mendapat informasi berkaitan dengan materi yang sedang dipelajari. Informasi tersebut dapat berupa manfaat matematika dalam

Ayo, Mencoba

Persiapkan kamu mencoba melakukan simulasi kredit. Simulasi kredit ini dapat dilakukan secara mandiri hanya dari gawaimu.

Perhatikan informasi berikut kemudian lengkapi titik-titik yang tersedia.

Jihan meminjam uang sebesar Rp13.000.000,00 di bank dengan bunga 12% per tahun yang diangsur selama 10 bulan. Dari hasil perhitungan pihak bank, ia memperoleh angsuran sebagai berikut.

Tabel 2.5 Angsuran Pinjaman

Angsuran ke- <i>n</i>	Sisa Pinjaman	Angsuran		Total Angsuran per bulan (Pokok + Bunga)
		Angsuran Pokok	Bunga (%)	
1	Rp15.000.000,00	Rp1.500.000,00	Rp150.000,00	Rp1.650.000,00
2	Rp13.500.000,00	Rp1.500.000,00	Rp135.000,00	Rp1.635.000,00
3	Rp12.000.000,00	Rp1.500.000,00	Rp120.000,00	Rp1.620.000,00
4	...	Rp1.500.000,00	Rp105.000,00	...
5	...	Rp1.500.000,00	...	...
6	...	Rp1.500.000,00	...	...
7	...	Rp1.500.000,00	...	...
8	Rp4.500.000,00	Rp1.500.000,00	...	...
9	Rp3.000.000,00	Rp1.500.000,00	Rp30.000,00	...
10	Rp1.500.000,00	Rp1.500.000,00	Rp15.000,00	...
Jumlah	Rp.....	Rp.....	Rp.....	Rp.....

56 Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII (Edisi Revisi)

Ayo, Berkomunikasi

Choirul merupakan siswa yang memiliki ketertarikan tinggi terhadap teknologi, dia ingin membantu usaha toko keluarannya. Untuk memudahkan mengecek harga barang dan stok barang dengan menggunakan kode. Barcode yang digunakan adalah jenis UPC (Universal Product Code) yang terdiri dari 10 atau 12 digit yang lebih sering digunakan untuk toko grosir dan eceran. Berikut contoh barcode yang digunakan Choirul.

Pada digit terakhir, yaitu *x*, *y*, dan *z* terdapat tiga angka yang perlu di isi (0 – 9). Tiga digit terakhir tersebut menunjukkan kode dan jenis barang. Barapa banyak kemungkinan susunan angka yang dapat menggantikan *x*, *y*, dan *z*?

(Gambar 2.3 Barcode UPC (Universal Product Code))

Petunjuk

- Perhatikan Gambar 3.2.
- Pahami perintah yang ada dan analisis kemungkinan.
- Diskusikan dengan temannya mengenai permasalahan tersebut.
- Buat argumentasi dan penjelasan berdasarkan hasil diskusi.
- Presentasikan hasil diskusi kepada teman yang lain.

Tahukah Kalian

Aturan perkalian dari bilangan asli dapat dituliskan dalam bentuk berikut.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n = n!$$

Notasi $n!$ dibaca *n* faktorial

Beberapa catatan yang perlu diperhatikan

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \times 2 = 2$

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

58 Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII (Edisi Revisi)

kehidupan manusia atau dalam sejarah kehidupan agar pengetahuan kamu semakin kuat dan terbangun semangat untuk gemar matematika.

13. Ayo, Berkolaborasi

Kamu akan saling bertukar pikiran dan gagasan untuk menyelesaikan permasalahan atau menyelesaikan soal. Permasalahan akan dapat diselesaikan jika ada kerja sama yang baik antara satu dengan lainnya sehingga pengetahuan menjadi utuh.

14. Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu diajak menggunakan berbagai macam bentuk teknologi, baik dalam bentuk perangkat keras seperti kalkulator, maupun perangkat lunak berupa aplikasi matematika agar dapat membantumu dalam menyelesaikan permasalahan yang ada.

15. Contoh Soal

Dalam Contoh Soal, diberikan soal beserta alternatif penyelesaiannya yang dapat membantumu memahami suatu konsep atau prosedur yang berkaitan dengan materi yang sedang dipelajari.

2. Deret Geometri

Ayo, Bereksplorasi

Di suatu kawasan permukiman padat, terjadi peningkatan banyak rumah tangga yang membuang sampah sembarangan ke sungai dari bulan ke bulan. Data dari lembaga lingkungan menunjukkan bahwa perilaku ini tidak hanya merugikan, tetapi juga mengotori pola yang teratur dan mengahawakannya. Dimulai dari hanya beberapa rumah tangga pada bulan pertama, banyaknya melonjak tajam dalam lima bulan terakhir. Coba kamu hitung dampak pola pertumbuhan kasus lingkungan ini. Selain itu, renungkan dampaknya terhadap kesehatan masyarakat dan keseimbangan ekosistem. Berilah data yang dihimpun dari lembaga lingkungan tersebut.

Tabel 1.3 Banyak Rumah Tangga yang Membuang Sampah dalam 5 Bulan

Bulan	Agustus 2024	September 2024	Oktober 2024	November 2024	Desember 2024
Jumlah Rumah Tangga	2	6	18	54	162

Analisislah permasalahan tersebut dengan menjawab beberapa pertanyaan berikut.

- Apakah banyak rumah tangga yang membuang sampah tersebut membentuk suatu barisan bilangan?
- Berapa beda atau rasio dari barisan tersebut?
- Berapa banyak suku barisan tersebut?
- Bagaimana kamu menemukan jumlah seluruh rumah tangga yang membuang sampah pada bulan September-November?

Ayo, Berkolaborasi

Diskusikan dengan teman sebangkumu mengenai 13 suku deret geometri dengan melengkapi Tabel 1.4 berikut ini.

Bab 1 | Barisan dan Deret

Rumus Deret Aritmetika

Rumus untuk menghitung jumlah suku-suku deret aritmetika adalah

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

Keterangan:

- S_n = jumlah deret sebanyak n pada suku pertama
- a = suku pertama
- b = beda
- n = urutan suku

Ayo Berpikir Kritis

Setelah kamu melakukan eksplorasi, coba analisis hasil yang ditemukan oleh Gauss untuk menghitung suatu pola bilangan $1 + 2 + 3 + \dots + 96 + 99 + 100 + \dots$. Gunakan rumus di atas untuk membandingkan hasil perhitungan Gauss. Apakah hasilnya sama atau berbeda? Jelaskan!

Ayo Menggunakan Teknologi

Buka tautan atau scan barcode yang tersedia.

- Pahami petunjuk yang ada pada lembar kerja.
- Tuliskan beberapa pola bilangan pada tempat yang disediakan, analisislah pola bilangan tersebut!
- Amati dan diskusikan temuanmu.

Contoh 1.6

Suatu deret aritmetika memiliki pola $9 + 12 + 15 + \dots$. Berapa jumlah 26 suku pertama deret tersebut?

Alternatif penyelesaian:

Diketahui deret bilangan memiliki $a = 9$, $b = 3$, dan $n = 26$. Jumlah 26 suku pertama deret dihitung sebagai berikut.

23 Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII (Edisi Revisi)

Lintasan 2: $\frac{3}{4} \times 5 = 3$ meter (pantulan 1)
 Lintasan 3: $\frac{3}{4} \times 3 = 1,8$ meter (pantulan 2)
 dan seterusnya.

Panjang lintasan dihitung menggunakan rumus geometri tak hingga berikut.

$$S_{\infty} = \frac{a}{(1-r)}$$

Berdasar soal, diketahui $a = 3$ (tinggi pantulan pertama) dan $r = \frac{3}{4}$.

Karena bola tenis memantul 2 kali saat jatuh, maka panjang lintasan untuk pantulan adalah

$$\begin{aligned} 2S_{\infty} &= 2 \times \frac{3}{(1-\frac{3}{4})} \\ &= 2 \times \left(\frac{3}{\frac{1}{4}}\right) \\ &= 2 \times \frac{3}{\frac{1}{4}} \\ &= 2 \times 3 \times \frac{4}{1} \\ &= 15 \end{aligned}$$

Ditemukan bahwa panjang lintasan untuk pantulan adalah 15 meter. Jadi, total panjang lintasan seluruhnya adalah $5 + 15 = 20$ meter.

Latihan 14

1. Suatu deret geometri memiliki suku pertama $a = \frac{1}{2}$. Hitunglah jumlah 6 suku pertama deret tersebut.
2. Suatu deret geometri adalah $108, 64, \dots$ adalah 972. Tentukan suku pertama (a) dan rasio (r) deret tersebut.
3. Suatu bola dijatuhkan dari ketinggian 10 meter. Setiap pantulan mencapai $\frac{2}{3}$ dari tinggi sebelumnya. Hitung total seluruh jarak yang ditempuh oleh bola tersebut hingga berhenti.
4. Galang berpendapat bahwa deret $3 + 6 + 12 + 24 + \dots$ dengan $r = 2$ memiliki jumlah tak hingga $S_{\infty} = -3$. Apakah pendapat Galang benar? Jelaskan.

Bab 1 | Barisan dan Deret 219

16. Latihan

Dalam Latihan dibagi menjadi tiga kategori, yaitu soal dasar, soal menengah, dan soal tingkat tinggi. Pertanyaan pada tingkat dasar berupa jawaban pendek untuk menguji pemahaman konsep materi dasar, tingkat menengah dalam bentuk aplikasi soal yang terstruktur, sedangkan tingkat tinggi berupa permasalahan dan keterampilan tingkat tinggi.

17. Ayo, Berefleksi

Kamu diajak untuk melihat dan mengingat kembali semua materi yang telah kamu pelajari. Bentuk kegiatan ini dapat berupa membandingkan pengetahuan yang sudah didapatkan dan diaplikasikan untuk menyelesaikan soal.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui beberapa hal berikut.

Simpanan pertama (M) = Rp2.000.000,00

Persentase bunga ($p\%$) = 5%

Terdapat dahulu ditentukan besar bunga yang didapatkan selama 4 tahun, yaitu

$$\begin{aligned} B &= M \times p\% \times n \\ &= 2.000.000 \times 0,05 \times 4 \\ B &= 400.000 \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \text{Total} &= M + B \\ &= 2.000.000 + 400.000 \\ &= 2.400.000 \end{aligned}$$

Total uang yang didapatkan Zaka selama 4 tahun sebesar Rp2.400.000,00.

Ayo, Berefleksi

Berikan centang (✓) pada kolom yang menurutmu sesuai setelah mempelajari materi barisan dan deret.

Kategori Kemampuan	Tidak Mengetahui	Mengetahui
Membedakan barisan aritmetika dengan barisan geometri.		
Menentukan suku ke- n dari suatu barisan aritmetika.		
Menentukan suku- n dari suatu barisan geometri.		
Menentukan jumlah n suku pertama dari suatu barisan aritmetika.		
Menentukan jumlah n suku pertama dari suatu barisan geometri.		
Membedakan bunga tunggal.		
Menghitung bunga tunggal.		

Uji Kompetensi Bab 1

1. Suatu barisan aritmetika 4, 1, -2, -5, ... Suku ke-10 dari barisan tersebut adalah ...
2. Suku ke- n dari suatu barisan dirumuskan $U_n = 15 - 3n$. Suku ke-15 dari barisan tersebut ada ...
3. Tempat duduk di suatu gedung disusun beraturan. Banyak kursi di belakang dengan banyak baris di belakangnya. Banyak kursi di baris terdepan ada 8 kursi, jumlah seluruh kursi dalam gedung tersebut ada ...
4. Seorang petani jeruk mencatat hasil panennya selama 11 hari pertama. Setiap harinya, hasil panen mengalami kenaikan tetap dimulai hari pertama, kedua, ketiga berturut-turut 15 kg, 17 kg, 19 kg, dan seterusnya. Jumlah hasil panen selama 11 hari pertama adalah ...
5. Diketahui deret bilangan $10 + 11 + 12 + 13 + \dots + 99$. Dari deret bilangan tersebut, jumlah bilangan yang habis dibagi dua tetapi tidak habis dibagi lima adalah ...
6. Raka mengikuti program Youth Creative Entrepreneur di sekolahnya. Untuk membeli peralatan produksi awal, ia memperoleh dana talangan usaha sebesar Rp2.500.000,00 dari koperasi pemuda. Koperasi tersebut menerapkan bunga sederhana sebesar 4% per tahun dan memberikan keringanan berupa angsuran bulanan tetap selama 2 tahun agar para peserta tidak terbebani. Sebagai bentuk tanggung jawab finansial, Raka perlu menghitung besar cicilan bulanan yang harus ia bayarkan agar pinjaman tersebut lunas sesuai perjanjian. Berapakah cicilan yang harus dibayarkan Raka setiap bulan?
7. SMA Abinaya mempersiapkan pameran seni tahunan, panitia menyiapkan sebuah instalasi seni cahaya yang akan dipasang di aula sekolah. Instalasi tersebut menggunakan lima batang pipa logam sebagai rangka utama, dengan panjang pipa yang dibuat berbeda-beda agar tampilan visual terlihat proporsional dan menarik. Untuk mencapai desain tersebut, panjang kelima pipa disusun mengikuti pola pertumbuhan beraturan sehingga membentuk barisan geometri dari pipa yang paling pendek hingga yang paling panjang. Diketahui bahwa pipa terpendek memiliki panjang 1 cm, sedangkan pipa terpanjang memiliki panjang 24 cm. Seluruh pipa tersebut berasal dari satu batang pipa logam utuh yang kemudian

Bab 1 | Barisan dan Deret 23

dipotong menjadi lima bagian sesuai rancangan. Berdasarkan informasi tersebut, tentukan panjang batang pipa semula sebelum dipotong.

8. Sebuah kelompok siswa akan digunakan untuk menyelenggarakan acara Student Leadership Summit. Panitia menyusun tempat duduk peserta dalam barisan bertingkat, di mana setiap baris di bagian belakang memiliki 2 kursi lebih banyak dibandingkan baris di depannya agar seluruh peserta dapat melihat panggung dengan jelas. Berdasarkan rancangan denah tempat duduk, diketahui bahwa perbandingan jumlah kursi pada baris ke-5 dan baris ke-13 adalah $1 : 2$, serta hari terakhir merupakan baris dengan jumlah kursi terbanyak, yaitu 50 kursi. Untuk keperluan persiapan logistik, panitia perlu menentukan jumlah seluruh kursi yang tersedia di gedung tersebut. Berdasarkan informasi tersebut, tentukan total kursi pada ruang pertemuan itu.
9. Kenaikan harga barang-barang disebut inflasi. Berdasarkan analisis, ekonomi Indonesia akan mengalami inflasi sebesar 8% per tahun selama 5 tahun mendatang. Apabila harga emas sekarang ini adalah Rp2.000.000,00 per gram, tentukan harga emas tersebut empat tahun kemudian.
10. Bakteri membelah menjadi 2 bagian setiap 4 jam. Jika pada pukul 12.00 banyaknya bakteri 1.000 unit, berapa banyaknya bakteri pada pukul 20.00 untuk hari yang sama?

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, berikan tanggapanmu terhadap pertanyaan di bawah ini.

1. Strategi apa yang kamu gunakan untuk menyelesaikan pertanyaan di bab ini?
2. Apakah strategi tersebut telah membantu kamu belajar lebih mudah?
3. Menurutmu, bagian mana dari materi barisan dan deret paling mudah? Selain itu, bagian mana yang masih sulit kamu pahami?
4. Menurutmu, apa manfaat mempelajari barisan dan deret untuk kehidupanmu di masa depan?

18. Uji Kompetensi

Uji Kompetensi ini ada di setiap bab, yang merupakan alat ukur untuk menguji tingkat ketercapaian kamu dalam memahami materi dalam bab tersebut. Kamu akan mengerjakan sejumlah soal yang bervariasi dari yang sederhana hingga yang kompleks.

19. Refleksi

Refleksi ini ada di setiap akhir bab, yang merupakan kegiatan introspeksi dan evaluasi diri secara mendalam yang dilakukan peserta didik terhadap proses pembelajaran yang telah berlangsung. Tujuan kegiatan ini untuk memahami apa yang telah terjadi, mengidentifikasi keberhasilan dan kekurangan pembelajaran, serta menemukan solusi untuk meningkatkan kualitas pembelajaran di masa mendatang.



KEMENTERIAN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
REPUBLIK INDONESIA, 2025

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII (Edisi Revisi)

Penulis: Mohammad Tohir, dkk

ISBN: 978-634-00-3118-8 (jil.3 PDF)

Bab 1

Barisan dan Deret



Kamu memiliki suatu tanaman yang tumbuh dengan pola pertumbuhan tinggi teratur setiap minggu. Jika tinggi tanaman pada minggu pertama 2 cm, minggu kedua 4 cm, dan minggu ketiga 6 cm, kira-kira berapa tinggi tanamanmu pada minggu ke-7?

Apakah pola tinggi tanaman tersebut dapat diprediksi?

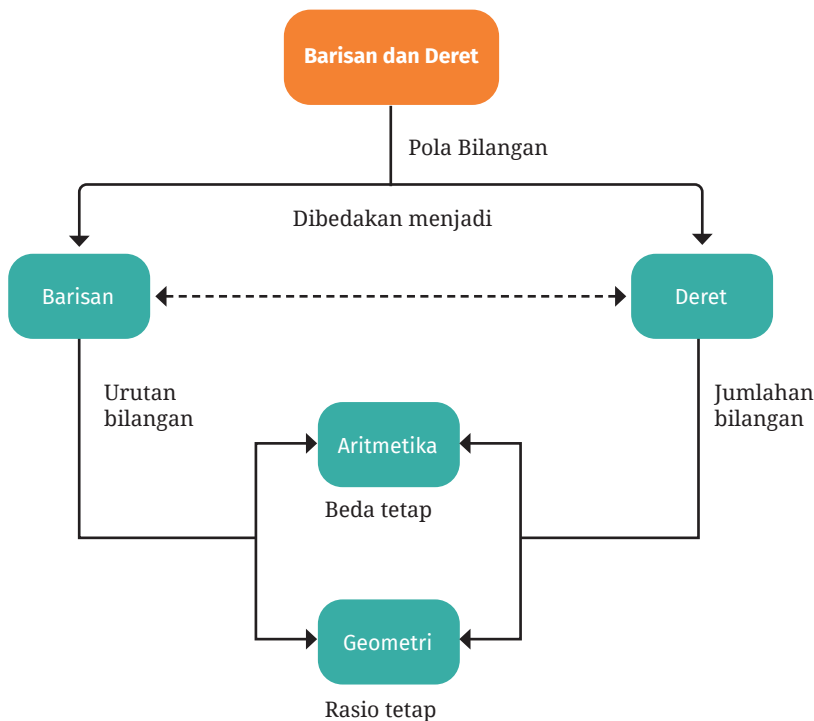
Tujuan Pembelajaran

Setelah kamu mempelajari bab ini, diharapkan dapat menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan dan deret aritmetika maupun barisan dan deret geometri. Selain itu, kamu juga diharapkan dapat menggunakan konsep barisan dan deret untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan bunga tunggal.

Kata Kunci

- ▶ Barisan aritmetika
- ▶ Barisan geometri
- ▶ Deret aritmetika
- ▶ Deret geometri
- ▶ Bunga tunggal

Peta Konsep



A. Barisan

1. Barisan Aritmetika

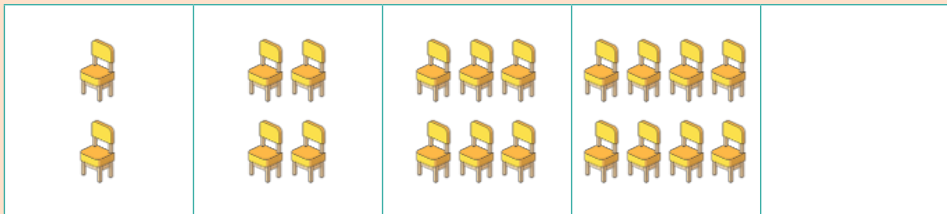


Ayo, Mengingat Kembali

Barisan dan deret sangat erat kaitannya dengan konsep pola. Penerapan barisan bilangan sangat mudah ditemui dalam kehidupan sehari-hari.

Coba perhatikan gambar berikut.

Jika kamu menemukan susunan kursi berikut, dapatkah kamu menentukan dengan tepat berapa banyak kursi pada kotak terakhir?



Gambar 1.1 Susunan Kursi

Jika kamu menemukan susunan bola berikut, dapatkah kamu menentukan dengan tepat berapa banyak bola pada kotak terakhir?



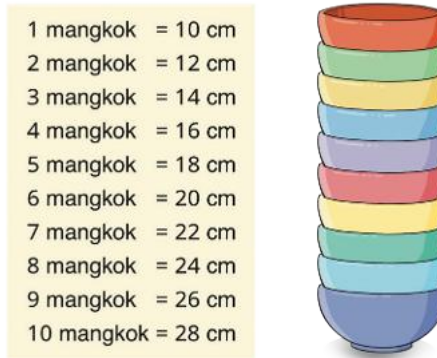
Gambar 1.2 Susunan Bola

Untuk mengetahui cara menentukan dengan tepat susunan kursi dan bola pada kolom terakhir, pelajari materi berikut dengan cermat.



Ayo, Bereksplorasi

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.3 Susunan Mangkok

Gambar tersebut menunjukkan tumpukan beberapa mangkok yang disusun secara bertingkat. Setiap penambahan satu mangkok menyebabkan tinggi tumpukan bertambah dengan ukuran tertentu. Dari pengukuran pada gambar, diketahui bahwa tinggi tumpukan 1 mangkok adalah 10 cm, 2 mangkok adalah 12 cm, 3 mangkok adalah 14 cm, dan seterusnya hingga 10 mangkok memiliki tinggi 28 cm.

Ayo, amati dan bandingkan tinggi tumpukan mangkok pada setiap penambahan jumlah mangkok. Perhatikan bahwa setiap kali satu mangkok ditambahkan, tinggi tumpukan tidak bertambah secara acak, melainkan mengikuti pola tertentu.

Jawablah pertanyaan berikut dengan berdiskusi bersama teman kelompokmu.

1. Jika tinggi tumpukan mangkok dicatat dalam tabel berikut, lengkapi data yang belum terisi.

Tabel 1.1 Banyak Susunan Mangkok

Jumlah mangkok	1	2	3	4	5	6
Tinggi (cm)	10	12	14	16	...	...

- b. Jika tinggi maksimal rak dapur adalah 40 cm, berapa mangkok paling banyak yang dapat ditumpuk tanpa melebihi tinggi rak tersebut? Bagaimana cara kalian menentukan jawabannya? Jelaskan alasan kalian.

Tabel 1.1 menunjukkan pola bilangan 10, 12, 14, 16, ..., ...

Jika kalian amati dengan cermat, tinggi tumpukan mangkok bertambah secara teratur dengan selisih yang sama. Pola bilangan yang memiliki aturan pertambahan tetap seperti ini disebut barisan bilangan.

Jika tinggi tumpukan mangkok dinyatakan sebagai suku, dapat ditulis:

suku ke-1 dilambangkan dengan $U_1 = 10$

suku ke-2 dilambangkan dengan $U_2 = 12$

suku ke-3 dilambangkan dengan $U_3 = \dots$

suku ke-4 dilambangkan dengan $U_4 = \dots$

...

suku ke- n dilambangkan dengan U_n .

Barisan bilangan dapat dinyatakan dalam **bentuk umum** berikut.

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$$

Jika kamu perhatikan, ada selisih yang sama antara suku-suku tersebut.



Berapakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan?

$$U_2 - U_1 = \dots - \dots = \dots$$

$$U_3 - U_2 = \dots - \dots = \dots$$

$$U_4 - U_3 = \dots - \dots = \dots$$

Ternyata beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan selalu sama, sehingga dapat dikatakan bahwa

Suatu barisan dengan beda atau selisih antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut BARISAN ARITMETIKA. Beda pada barisan aritmetika dilambangkan dengan b .

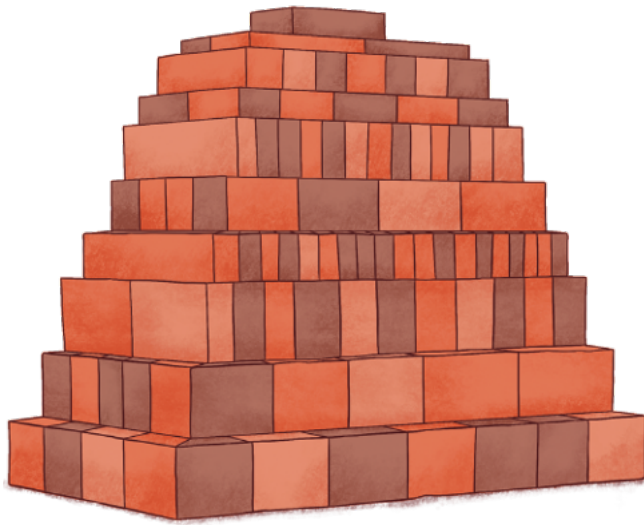
Karena beda selalu tetap, maka b pada barisan aritmetika dapat dinyatakan dengan

$$b = U_n - U_{n-1}$$



Ayo, Bekerjasama

Pada suatu kegiatan kerja bakti di sekolah, sekelompok siswa mengamati susunan batu bata yang disusun bertingkat membentuk bangunan menyerupai piramida. Susunan bata tersebut dibuat rapi, di mana lapisan paling bawah terdiri atas paling banyak bata, sedangkan semakin ke atas jumlah bata pada setiap lapisan semakin berkurang. Visualisasi susunan bata tersebut ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 1.4 Susunan Batu Bata Bertingkat

Dari gambar tersebut, terlihat bahwa setiap tingkat tersusun secara teratur dan membentuk suatu pola tertentu. Guru kemudian mengajak siswa untuk mengamati dan menyelidiki apakah susunan batu bata pada setiap tingkat membentuk pola bilangan yang teratur. Secara rinci, banyak batu bata pada setiap tingkat adalah sebagai berikut.

Baris ke-1 = 28

Baris ke-2 = 25

Baris ke-3 = 22

Baris ke-4 = 19

Baris ke-5 = 16

...

dan seterusnya

Berdasarkan data tersebut, amati dengan cermat perubahan jumlah batu bata pada setiap tingkat. Selanjutnya, diskusikan bersama kelompokmu untuk menjawab pertanyaan “Berapa banyak batu bata pada tingkat ke-10?”

Sebagai bantuan untuk menentukan banyak batu bata pada tingkat ke-10, terlebih dahulu analisislah banyak batu bata pada setiap tingkat untuk menemukan pola yang berlaku.

- a. Menentukan beda atau selisih banyak kursi pada tiap baris.

$$\text{Tingkat ke-1} = 28 = 28$$

$$\begin{aligned} \text{Tingkat ke-2} &= 25 = 28 + (-3) && (28 \text{ ditambah } -3 \text{ sebanyak } 1 \text{ kali}) \\ &= 28 + (1 \times (-3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tingkat ke-3} &= 22 = 28 + (-3) + (-3) && (28 \text{ ditambah } -3 \text{ sebanyak } 2 \text{ kali}) \\ &= 28 + (... \times (-3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tingkat ke-4} &= 19 = 28 + ... + ... + ... && (28 \text{ ditambah } -3 \text{ sebanyak } ... \text{ kali}) \\ &= 28 + (... \times (-3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tingkat ke-5} &= 16 = 28 + ... + ... + ... + ... && (28 \text{ ditambah } ... \text{ sebanyak } ... \text{ kali}) \\ &= 28 + (... \times ...) \end{aligned}$$

⋮

Sehingga,

$$\begin{aligned} \text{Tingkat ke-10} & \quad 28 \text{ ditambah } ... \text{ sebanyak } ... \text{ kali} \\ &= 28 + (... \times ...) \\ &= ... \end{aligned}$$

- b. Menentukan pola dari perhitungan-perhitungan sebelumnya.

$$\begin{array}{ccc} \text{Tingkat ke-10} = 28 + (... \times ...) = ... & & \\ \downarrow & \swarrow & \searrow \\ \text{Suku ke-}n \text{ } (U_n) & & \text{Selisih/beda } (b) \\ \swarrow & \searrow & \\ \text{Suku pertama } (a) & & (n-1) \end{array}$$

Berdasarkan analisis di atas, rumus umum untuk menentukan suku ke- n pada suatu barisan aritmetika adalah

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Keterangan:

U_n = suku ke- n

a = suku pertama

n = urutan suku

b = beda

Contoh 1.1

Suatu barisan aritmetika dengan suku ke-4=16, suku ke-8=28. Rumus suku ke- n barisan tersebut adalah ...

Alternatif penyelesaian:

Terlebih dahulu suku ke-3 dan suku ke-6 dinyatakan dalam bentuk rumus umum seperti berikut.

$$U_4 = a + 3b = 16$$

$$U_8 = a + 7b = 28$$

$$-4b = -12$$

$$b = \frac{-12}{-4}$$

$$b = 3$$

Substitusi $b = 3$

$$a + 3b = 16$$

$$a + 3(3) = 16$$

$$a + 9 = 16$$

$$a = 16 - 9$$

$$a = 7$$

Sehingga, rumus suku ke- n barisan aritmetika di atas adalah

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_n = 7 + (n - 1)3$$

$$= 7 + 3n - 3$$

$$U_n = 3n + 4$$

Jadi, rumus suku ke- n dari barisan tersebut adalah $U_n = 3n + 4$

Contoh 1.2

Dina mengikuti program menabung rutin di koperasi sekolah. Setiap bulan, jumlah uang yang ia tabungkan selalu bertambah dengan selisih yang tetap. Diketahui bahwa pada bulan ke-5, uang tabungan Dina sebesar Rp70.000,00, sedangkan pada bulan ke-9 uang tabungannya menjadi Rp90.000,00.

- Berapakah selisih kenaikan nominal tabungan Dina setiap bulan?
- Tentukan berapa rupiah uang yang ditabung Dina pada bulan pertama.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

$$U_5 = 70.000$$

$$U_9 = 90.000$$

- Selisih kenaikan nominal tabungan Dina setiap bulan

$$U_5 = 70.000$$

$$a + (5 - 1)b = 70.000$$

$$a + 4b = 70.000 \text{ (persamaan 1)}$$

$$U_9 = 90.000$$

$$a + (9 - 1)b = 90.000$$

$$a + 8b = 90.000 \text{ (persamaan 2)}$$

Eliminasi persamaan 1 dan 2

$$a + 8b = 90.000$$

$$a + 4b = 70.000$$

$$\hline 4b = 20.000$$

$$b = 5.000$$

b adalah beda atau selisih

Sehingga, selisih kenaikan nominal tabungan Dina setiap bulan adalah **Rp5.000,00**.

- Uang yang ditabung Dina pada bulan pertama

Proses menentukan uang yang ditabung Dina pada bulan pertama, yaitu menentukan suku pertama yang dilambangkan dengan bantuan nilai b (beda) yang telah diketahui.

Gunakan persamaan 1, lalu substitusi nilai $b = 5.000$, diperoleh

$$a + 4b = 70.000$$

$$a + 4(5.000) = 70.000$$

$$a + 20.000 = 70.000$$

$$a = 70.000 - 20.000$$

$$a = 50.000$$

a adalah suku pertama

Jadi, uang yang ditabung Rudi untuk pertama kalinya adalah **Rp50.000,00**.



Ayo, Berpikir Kreatif

Coba kamu temukan alternatif penyelesaian yang lain. Jika uang yang ditabung pertama kali oleh Rudi dihitung menggunakan persamaan 2, apakah hasilnya sama? Bagaimana jika kamu diminta menentukan jumlah tabungan setelah satu tahun pertama dan setelah bulan ke-17?

Latihan 1.1

1. Tuliskan dua suku berikutnya dari barisan bilangan di bawah ini.

Barisan bilangan		Suku berikutnya
12, 10, 8, 6, ..., ...	•	-4, 0
..., 7, 12, 18, 25, ...	•	4, 2
-16, -12, -8, ..., ...	•	3, 33
..., ..., 4, -2, -10, -20	•	-4, -7
	•	10, 8

2. Tentukan suku ke-100 dari barisan berikut: 6, -1, -8, -15, ...
3. Jika diketahui barisan aritmetika dengan suku ke-3 = -43 dan suku ke-8 = 2. Tentukan suku pertama, beda, serta rumus suku ke- n dari barisan tersebut.
4. Setiap minggu, Ibu Rina mengumpulkan 8 botol plastik bekas untuk didaur ulang. Setiap kali pengumpulan, jumlah total botol plastik yang telah terkumpul dicatat oleh petugas bank sampah di lingkungannya.

Data pencatatan tersebut disajikan pada tabel berikut.

Minggu ke-	Botol yang Dikumpulkan	Total Botol Berkumpul
1	8	8
2	8	16
3	8	24

Kolom ketiga menunjukkan jumlah seluruh botol plastik yang telah dikumpulkan Ibu Rina sampai minggu ke- n .

- Berapa total botol plastik yang tercatat pada minggu ke-12?
 - Setelah 25 minggu, berapakah total botol yang tercatat pada kolom total?
5. Siti sedang berlatih melompat tali setiap sore. Pada hari pertama ia mampu melakukan 3 lompatan, hari kedua 5 lompatan, dan hari ketiga 7 lompatan. Jumlah lompatan yang ia lakukan setiap hari selalu bertambah secara teratur dengan pola yang sama. Latihan tersebut berlangsung hingga hari ke-10. Berapa banyak lompatan yang dilakukan Siti pada hari ke-10?

2. Barisan Geometri



Ayo, Mengingat Kembali

Oemar bermain bola kasti, dia menjatuhkan bola tersebut dari balkon yang memiliki ketinggian tertentu. Setelah dijatuhkan, kejadian yang terjadi adalah bola memantul kembali ke ketinggian setengah dari ketinggian sebelumnya. Misalnya, ketinggian balkon rumah Oemar adalah 16 meter, maka pantulan pertamanya mencapai 8 meter. Pantulan kedua mencapai 4 meter, dan seterusnya. Setiap pantulan berikutnya hanya mencapai setengah dari ketinggian pantulan sebelumnya.



Gambar 1.5 Menjatuhkan Bola dari Balkon Rumah

Pola ketinggian pantulan ini membentuk sebuah urutan di mana setiap suku adalah setengah dari suku sebelumnya. Pola ini disebut **rasio**, dan ini adalah kunci untuk memahami Barisan Geometri.



Ayo, Bereksplorasi

Seorang siswa kelas XII melakukan simulasi komputasi tentang pembagian ruang memori digital pada sebuah sistem komputer. Sebuah blok memori utama berbentuk persegi panjang dianggap sebagai satu kesatuan utuh. Pada tahap awal, sistem melakukan proses partisi biner, yaitu membagi setiap blok memori menjadi dua bagian yang sama besar. Pada tahap ke-1, blok memori dibagi satu kali sehingga terbentuk 2 partisi memori yang sama besar. Pada tahap berikutnya, setiap partisi kembali dibagi menjadi dua bagian yang sama besar.

Proses ini dilakukan secara berulang hingga beberapa tahap. Banyaknya partisi memori yang terbentuk dicatat dalam Tabel 1.2 berikut.

Tabel 1.2 Banyak Lipatan dan Bagian Sama Besar yang Terbentuk Pada Kertas

Jumlah tahap partisi	1 tahap	2 tahap	3 tahap	4 tahap
Banyak blok memori sama besar	2 blok	... blok	... blok	... blok

Selanjutnya, peserta didik mencoba urutan pembagian memori yang berbeda, misalnya dengan membagi sebagian blok terlebih dahulu sebelum blok lain.

- Tentukan banyaknya blok memori sama besar yang terbentuk pada setiap tahap.
- Apakah jumlah blok memori yang terbentuk selalu sama meskipun urutan pembagiannya berbeda?
 - ▶ Apakah banyaknya blok memori yang sama besar pada setiap tahap partisi membentuk barisan bilangan?
 - ▶ Aturan apa yang terdapat pada barisan bilangan tersebut?
 - ▶ Operasi hitung apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas?



- Coba amati dan tuliskan rasio antara dua suku yang berdekatan.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$\frac{U_4}{U_3} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

- Apakah rasio antara dua suku yang berdekatan memiliki nilai yang sama?

Definisi

Suatu barisan dengan rasio antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut barisan geometri. Rasio pada barisan geometri dilambangkan dengan r .

Karena nilai r selalu sama, yaitu $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3}$, maka rasio pada barisan geometri dapat dinyatakan

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Contoh 1.3

Suku pertama dari suatu barisan geometri adalah 3 dan rasionya adalah 2. Tuliskan lima suku pertama dari barisan tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Untuk menemukan suku-suku berikutnya, kalikan suku sebelumnya dengan rasio.

$$\text{Suku ke-1 } (U_1) = 3$$

$$\text{Suku ke-2 } (U_2) = 3 \times 2 = 6$$

$$\text{Suku ke-3 } (U_3) = 6 \times 2 = 12$$

$$\text{Suku ke-4 } (U_4) = 12 \times 2 = 24$$

$$\text{Suku ke-5 } (U_5) = 24 \times 2 = 48$$

Jadi, lima suku pertamanya adalah 3, 6, 12, 24, dan 48.



Ayo, Berkolaborasi

Perkembangan teknologi digital dan media sosial memberikan kemudahan bagi remaja dalam mengakses dan menyebarkan informasi. Peserta didik SMA, khususnya kelas XII, merupakan kelompok usia yang sangat aktif menggunakan berbagai *platform* media sosial seperti Instagram, TikTok, WhatsApp, dan X. Namun, tingginya intensitas penggunaan media sosial tersebut juga meningkatkan risiko terpapar informasi hoaks, yaitu informasi yang tidak benar, menyesatkan, atau belum terverifikasi kebenarannya. Berdasarkan hasil diskusi tim literasi digital sekolah, ditemukan bahwa hoaks yang sering diterima oleh remaja SMA antara lain berkaitan dengan isu pendidikan, selebritas, kesehatan, lowongan kerja, hingga isu sosial dan politik. Hoaks semacam ini sering menyebar melalui fitur *forward*, *share*, atau *repost*, tanpa terlebih dahulu dilakukan pengecekan kebenaran sumber informasinya. Untuk memahami seberapa cepat hoaks dapat menyebar, tim literasi digital melakukan sebuah simulasi. Pada awal pengamatan, terdapat 2 akun media sosial peserta didik yang membagikan sebuah informasi hoaks di dalam grup pertemanan. Setiap 2 jam, setiap akun yang telah membagikan hoaks tersebut memengaruhi 3 akun lain untuk ikut menyebarkan informasi yang sama, baik secara sadar maupun tidak sadar. Pola penyebaran ini diasumsikan berlangsung secara konsisten selama periode pengamatan.

Untuk menentukan jumlah akun yang terlibat dalam penyebaran hoaks setelah 10 jam, kamu harus melengkapi beberapa pernyataan di bawah ini.

- Suku pertama pada permasalahan di atas adalah
- Setiap dua jam, akun yang dipengaruhi menjadi 3, maka rasio pada barisan di atas adalah
- Dalam 10 jam, terjadi persebaran hoaks sebanyak $10 \text{ jam} : 2 \text{ jam} = \dots$ kali
Maka $n = 5$.

$$U_{\dots} = \dots$$

$$U_1 = 2$$

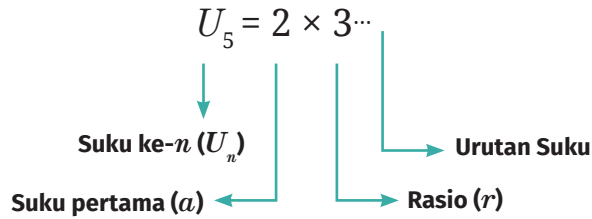
$$U_2 = 2 \times 3 \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } 1 \text{ kali}) = 2 \times 3^1$$

$$U_3 = 2 \times \dots \times \dots \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } \dots \text{ kali}) = 2 \times 3^{\dots}$$

$$U_4 = 2 \times \dots \times \dots \times \dots \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } \dots \text{ kali}) = 2 \times 3^{\dots}$$

$$U_5 = 2 \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } \dots \text{ kali}) = 2 \times 3^{\dots}$$

Sehingga didapatkan bahwa,



Dengan demikian, rumus umum menentukan suku ke- n pada barisan geometri adalah

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

Keterangan:

U_n = suku ke- n

a = suku pertama

n = urutan suku

r = rasio

Contoh 1.4

Suku pertama dari suatu barisan geometri adalah 20 dan nilai suku ke-4 adalah 540. Tentukan rasio dari barisan tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $a = 20$ dan $U_4 = 540$.

Rasio barisan tersebut dapat dihitung seperti berikut.

$$U_4 = 540$$

$$a \cdot r^{4-1} = 540$$

$$20 \cdot r^3 = 540$$

$$r^3 = \frac{540}{20}$$

$$r^3 = 27$$

$$r = \sqrt[3]{27}$$

$$r = 3$$

Jadi, rasio barisan geometri tersebut adalah 3.

Contoh 1.5

Seorang pelari membagi latihannya menjadi 5 interval dengan jarak tempuh membentuk barisan geometri. Jika interval terpendek adalah 16 meter dan interval terpanjang adalah 81 meter, berapa jarak pada interval ketiga yang harus dia tempuh?

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

Interval terpendek: $a = 16$

Interval terpanjang: $U_5 = 81$

Ditanyakan:

$$U_3 = \dots?$$

Penyelesaian:

Langkah pertama, tentukan rasio terlebih dahulu.

$$U_5 = 81$$

$$a \cdot r^{5-1} = 81$$

$$16 \cdot r^4 = 81$$

$$r^4 = \frac{81}{16}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{81}{16}}$$

$$r = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}$$

$$r = \frac{3}{2}$$

Selanjutnya, substitusi nilai $r = \frac{3}{2}$ untuk menemukan U_3

$$U_3 = a \cdot r^{3-1}$$

$$U_3 = 16 \cdot r^2$$

$$U_3 = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$U_3 = 16 \cdot \frac{9}{4}$$

$$U_3 = 4 \cdot 9$$

$$U_3 = 36$$

Jadi, jarak tempuh pada interval yang ketiga adalah 36 meter.



Ayo, Berpikir Kreatif

Misal kamu sedang melakukan aktivitas untuk menyelesaikan tugas kokurikuler. Aktivitas tersebut dilaksanakan dengan menjelajahi suatu situs kuil kuno yang memiliki deretan pilar-pilar misterius. Pilar pertama tampak tinggi biasa saja. Namun, pilar kedua terlihat dua kali lebih tinggi dari pilar pertama, pilar ketiga empat kali lebih tinggi dari yang pertama,



Gambar 1.6 Pilar-Pilar Kuno

dan seterusnya. Kamu mulai bertanya-tanya, apakah ada pola tersembunyi di balik tinggi pilar-pilar ini? Tiba-tiba, kamu menemukan gulungan kuno yang bertuliskan bahwa siapa pun yang mampu menebak tinggi pilar ke-10 akan menemukan harta karun tersembunyi. Bersama kelompokmu, kamu diminta menyusun catatan pengamatan dan menyimpulkan hubungan antartinggi pilar. Apakah kamu dapat menemukan pola pengali tetap yang digunakan? Apa yang terjadi jika kamu ubah tinggi pilar pertama? Bagaimana jika pola ini diteruskan hingga pilar ke-5 atau ke-8?



Ayo, Berpikir Kritis

Seorang siswa menyatakan bahwa pada barisan geometri, rasio yang lebih besar dari satu akan menyebabkan setiap suku bertambah besar, sedangkan rasio antara nol dan satu akan membuat nilai suku semakin mengecil. Tinjau kembali pendapat tersebut dengan mempertimbangkan berbagai kemungkinan nilai awal dan tanda rasio. Sajikan contoh maupun lawan contoh, lalu jelaskan keteraturan perubahan suku secara logis.

Latihan 1.2

1. Tentukan dua suku berikutnya dari barisan bilangan berikut ini.
 - a. $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots, \dots$
 - b. 16, 4, 1, ..., ...
 - c. 1, 1, 2, 6, ..., ...
 - d. 4, 4, 4, 4, ..., ...
2. Lakukan analisis untuk menentukan apakah barisan bilangan pada soal nomor 1 termasuk ke dalam barisan aritmetika atau barisan geometri. Jelaskan dasar penalaran yang digunakan dalam penentuan tersebut. Apabila barisan bilangan tersebut tidak termasuk keduanya, uraikan pola atau aturan yang membentuk barisan tersebut. Selanjutnya, diskusikan hasil analisis bersama anggota kelompok.
3. Tentukan suku ke-10 dari barisan 108, 36, 12, 4, ...
4. Jika diketahui barisan geometri dengan suku ke-2 = 48 dan suku ke-6 = 3. Tentukan tiga suku pertama dari barisan geometri tersebut.
5. Rani membagikan sebuah kartu ucapan kepada tiga orang temannya. Pada hari berikutnya, masing-masing penerima kartu tersebut menyampaikan kartu ucapan yang sama kepada tiga orang teman lain yang belum menerimanya. Kegiatan ini berlangsung secara berkelanjutan, dengan setiap penerima kartu meneruskan kartu tersebut kepada tiga individu baru pada hari selanjutnya. Dengan asumsi bahwa setiap orang hanya menerima kartu ucapan satu kali, tentukan banyaknya orang yang menerima kartu ucapan tersebut pada hari keenam.
6. Seorang petani menanam satu pohon yang setiap tahunnya berkembang menjadi dua pohon baru. Pada tahun pertama, hanya terdapat satu pohon. Namun, pada tahun berikutnya, pohon tersebut akan menghasilkan dua pohon, dan setiap pohon yang ada juga akan menghasilkan dua pohon tambahan setiap tahunnya. Proses ini berulang setiap tahun, di mana setiap pohon menggandakan jumlah pohon yang ada. Jika pohon pertama kali ditanam pada tahun pertama, berapa jumlah pohon yang akan ditemukan pada akhir tahun ke-15?

B. Deret



Ayo, Bereksplorasi

Ibu Wiji berencana membeli rumah untuk kebutuhan keluarganya. Rencana tersebut diawali dengan berinvestasi Rp10.000.000,00 di suatu bank dengan persentase pertumbuhan setiap tahun meningkat. Pertambahannya sebesar 12% setiap tahun dari tahun sebelumnya. Ibu Wiji saat ini memiliki anak berusia 3 tahun. Beliau akan merealisasikan pembelian rumah saat anaknya berusia 13 tahun. Bantulah Bu Wiji untuk mengamati perkembangan investasinya dengan memperhatikan beberapa pertanyaan berikut.

- Tuliskan nilai investasi yang dilakukan Bu Wiji untuk 5 tahun pertama.
- Berapa total nilai investasi Bu Wiji setelah 10 tahun?
- Menurutmu, apa yang terjadi pada grafik deret geometri? Gambarkan perkiraan grafik investasi Bu Wiji pada kertas berpetak (grafik).

Aktivitas ini dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep deret aritmetika dan geometri.

Coba diskusikan dengan teman sebangkumu terkait kegiatan eksplorasi di atas.

- Tuliskan investasi Bu Wiji untuk 5 tahun pertama.
- Jika kalian termotivasi untuk memulai investasi dari Bu Wiji. Kalian memulai investasi dengan Rp1.000.000,00 yang mendapatkan pertambahan nilai investasi sebesar Rp200.000,00 setiap tahun dari tahun sebelumnya.
 - Tuliskan nilai investasi kalian untuk 3 tahun pertama.
 - Jika kalian mulai berinvestasi sejak menjadi siswa baru, berapa total investasi kalian sampai lulus SMA?
- Coba bandingkan hasil temuan kalian terkait peningkatan nilai investasi dari Bu Wiji dengan nilai investasi kalian.

Berdasarkan aktivitas sebelumnya, dapat diketahui bahwa bentuk penjumlahan dari barisan bilangan akan membentuk deret bilangan. Dengan demikian, deret bilangan adalah jumlah suku-suku penyusun barisan bilangan. Deret bilangan terdiri dari deret aritmetika dan deret geometri.

1. Deret Aritmetika



Tahukah Kalian

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) lahir pada 30 April 1777 di Braunschweig. Dia adalah seorang matematikawan Jerman yang telah menunjukkan bakatnya sejak kecil. Ketika duduk di kelas 4 SD, guru matematikanya memberikan soal berupa penjumlahan bilangan dari 1 sampai 100 berikut untuk mengisi waktu luang.

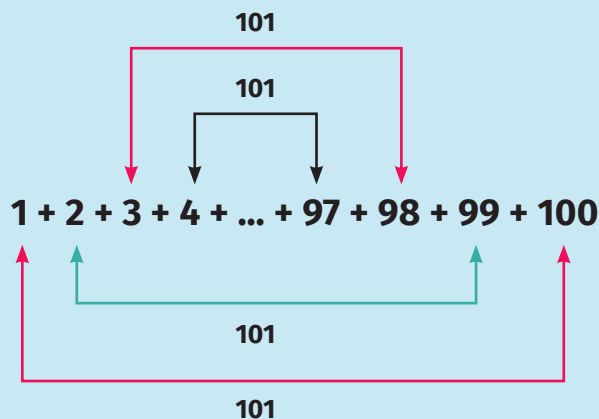
$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 = \dots$$

Tidak membutuhkan waktu yang lama, Gauss yang saat itu masih berusia 10 tahun langsung menjawab “5.050”. Ia menggunakan rumus deret aritmatika yang kini dikenal sebagai “**Rumus Gauss**”. Gurunya terkejut dan menyadari bahwa Gauss adalah anak jenius.

Berikut cara Gauss menyelesaikan penjumlahan bilangan tersebut.



Gambar 1.7 Carl Friedrich Gauss



Gauss mengelompokkan suku-suku pada deret tersebut sehingga memiliki nilai yang sama ketika dijumlahkan.

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 &= (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) \\
 &= 101 + 101 + \dots + 101 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{50 \text{ kali}} \\
 &= 50 \times 101 \\
 &= 5.050
 \end{aligned}$$

Sekarang coba cermati kembali deret bilangan berikut

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 = \dots$$

- Apakah bilangan pada deret di atas membentuk barisan?
- Barisan apakah yang dibentuk dari suku-suku pada deret di atas?



Ayo, Bereksplorasi

Deret aritmetika adalah suatu deret yang diperoleh dari menjumlahkan suku-suku pada barisan aritmetika.

Jika diketahui suatu barisan aritmetika $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_{10}$ dapat dibentuk deret aritmetika: $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{10}$.

Sehingga, didapatkan pola berikut.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= a \\
 U_2 &= a + b \\
 U_3 &= a + 2b \\
 &\vdots \\
 U_8 &= a + 7b \\
 U_9 &= a + 8b \\
 U_{10} &= a + 9b
 \end{aligned}$$

Ayo menganalisis rumus untuk menemukan 4 suku pertama (S_4) dan 10 suku pertama (S_{10}).

- Jumlah empat suku pertama deret aritmetika (S_6).

$$\begin{aligned} S_6 &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 \\ &= a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b) + (a + 5b) \\ &= 6a + 15b \\ &= 3(2a + 5b) \\ S_6 &= \frac{6}{2} (2a + (4 - 1))b \end{aligned}$$

- Jumlah sepuluh suku pertama deret aritmetika (S_{10}).

$$\begin{aligned} S_{10} &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_8 + U_9 + U_{10} \\ &= a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \dots + (a + 7b) + (a + 8b) + (a + 9b) \\ &= 10a + 45b \\ &= 5(2a + 9b) \\ S_{10} &= \frac{10}{2} (2a + (10 - 1))b \end{aligned}$$

Didapatkan jumlah 6 suku pertama deret aritmetika, yaitu $S_6 = \frac{6}{2} (2a + (4 - 1))b$,

dan jumlah 10 suku pertama deret aritmetika, yaitu $S_{10} = \frac{10}{2} (2a + (10 - 1))b$.

Dari kedua temuan di atas, dapat disimpulkan bahwa rumus jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika:

$$\begin{aligned} S_n &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n \\ &= a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (a + (n - 1)b) \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

S_n dapat ditulis juga menjadi

$$\begin{aligned} S_n &= U_n + U_{n-1} + \dots + U_2 + U_1 \\ &= (a + (n - 1)b) + (a + (n - 2)b) + \dots + (a + 2b) + a \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Jika persamaan (1) dan (2) dijumlahkan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} S_n &= a + (a + b) + \dots + (a + (n - 1)b) \\ S_n &= (a + (n - 1)b) + (a + (n - 2)b) + \dots + a \\ \hline 2S_n &= 2a + (n - 1)b + 2a + (n - 1)b + \dots + 2a + (n - 1)b + \\ 2S_n &= n \times [2a + (n - 1)b] \\ 2S_n &= n \times [a + a + (n - 1)b] \\ 2S_n &= n \times (a + U_n) \\ S_n &= \frac{n}{2} (a + U_n) \end{aligned}$$

Rumus Deret Aritmetika

Rumus untuk menghitung jumlah suku-suku deret aritmetika adalah

$$S_n = \frac{n}{2} (a + U_n) \text{ atau } S_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)b)$$

Keterangan:

S_n = jumlah deret sebanyak n pada suku pertama

a = suku pertama

b = beda

n = urutan suku



Ayo, Berpikir Kritis

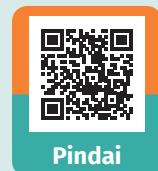
Setelah melakukan eksplorasi, amati pola deret aritmetika yang terbentuk dari jarak antar anak tangga pada sebuah gedung, misalnya 2 m, 4 m, 6 m, hingga tangga ke-20. Tanpa menghitung satu per satu, buat prediksi mengenai total jarak dari tangga pertama hingga tangga terakhir. Bandingkan prediksi tersebut dengan pengukuran langsung atau simulasi. Jelaskan secara logis dan matematis mengapa pola deret dapat digunakan untuk memperkirakan total jarak, serta analisis bagaimana variasi tinggi tangga pertama atau jarak antar tangga memengaruhi hasil perhitungan.



Ayo, Menggunakan Teknologi

Buka tautan atau scan QR code yang tersedia.

1. Pahami petunjuk yang ada pada lembar kerja.
2. Tuliskan beberapa pola bilangan pada tempat yang disediakan, analisislah pola bilangan tersebut.
3. Amati dan diskusikan temuanmu.



Pindai

<https://bukupusbuk.id/s/mtk12geogebra1>

Contoh 1.6

Suatu deret aritmetika memiliki pola $9 + 12 + 15 + \dots$

Berapa jumlah 26 suku pertama deret tersebut?

Alternatif penyelesaian:

Diketahui deret bilangan memiliki $a = 9$, $b = 3$, dan $n = 26$.

Jumlah 26 suku pertama deret dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} (2a + (n-1)b) \\ S_{26} &= \frac{26}{2} [2 \times 9 + (26-1)3] \\ &= \frac{26}{2} [18 + 25 \times 3] \\ &= 13(18 + 75) \\ &= 13(93) \\ &= 1.209 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah 26 suku pertama deret aritmetika di atas adalah 1.209.

Latihan 1.3

1. Suatu deret aritmetika memiliki suku pertama 3 dan beda 4. Tentukan suku ke-10 dan jumlah 10 suku pertama.
2. Seorang petani menata buah jeruk dalam tumpukan berbentuk segitiga. Tumpukan paling bawah berisi 50 jeruk, di atasnya 47 jeruk, kemudian 44 jeruk, dan seterusnya hingga tumpukan terakhir hanya berisi 2 jeruk. Hitunglah total jeruk yang ditumpuk.
3. Diberikan deret aritmetika dengan $S_{10} = 120$ dan $S_{20} = 440$. Seorang siswa menyimpulkan bahwa suku pertama (a) adalah 4 dan beda (b) adalah 2. Apakah kesimpulan siswa tersebut benar? Jelaskan.
4. Tiga bilangan membentuk deret aritmetika. Jika jumlah mereka 24 dan hasil kalinya 440, tentukan ketiga bilangan tersebut.
5. Jika U_n menyatakan suku ke- n suatu barisan aritmetika dan diketahui $U_6 - U_8 + U_{10} - U_{12} + U_{14} = 20$, berapa jumlah 19 suku pertama barisan tersebut?

2. Deret Geometri



Ayo, Bereksplorasi

Di suatu kawasan permukiman padat, terjadi peningkatan banyak rumah tangga yang membuang sampah sembarangan ke sungai dari bulan ke bulan. Data dari lembaga lingkungan menunjukkan bahwa perilaku ini tidak hanya meningkat, tetapi juga mengikuti pola yang teratur dan mengkhawatirkan. Dimulai dari hanya beberapa rumah tangga pada bulan pertama, banyaknya melonjak tajam dalam lima bulan terakhir. Coba kamu hitung dampak pola pertumbuhan kasus lingkungan ini. Selain itu, renungkan dampaknya terhadap kesehatan masyarakat dan keseimbangan ekosistem. Berikut data yang dihimpun dari lembaga lingkungan tersebut.

Tabel 1.3 Banyak Rumah Tangga yang Membuang Sampah dalam 5 Bulan

Bulan	Agustus 2024	September 2024	Oktober 2024	November 2024	Desember 2024
Jumlah Rumah Tangga	2	6	18	54	162

Analisislah permasalahan tersebut dengan menjawab beberapa pertanyaan berikut.

- a. Apakah banyak rumah tangga yang membuang sampah tersebut membentuk suatu barisan bilangan?
- b. Berapa beda atau rasio dari barisan tersebut?
- c. Berapa banyak suku barisan tersebut?
- d. Bagaimana kamu menemukan jumlah seluruh rumah tangga yang membuang sampah pada bulan September-November?



Ayo, Berkolaborasi

Diskusikan dengan teman sebangkumu mengenai jumlah suku-suku deret geometri dengan melengkapi Tabel 1.4 berikut ini.

Tabel 1.4 Proses Menganalisis Rumus Jumlah Deret Geometri

	1	2	3
S_2 : Jumlah rumah tangga dua bulan pertama	$S_2 = 2 + 6 = \dots$	$S_2 = \frac{18 - 2}{3 - 1} = \frac{16}{2} = \dots$	$S_2 = \frac{U_3 - U_1}{r - 1}$
S_3 : Jumlah rumah tangga tiga bulan pertama	$S_3 = 2 + \dots + \dots = \dots$	$S_3 = \frac{\dots - 2}{3 - 1} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$S_3 = \frac{U_{\dots} - U_1}{r - 1}$
S_4 : Jumlah rumah tangga empat bulan pertama	$S_4 = \dots + \dots + \dots + \dots = \dots$	$S_4 = \frac{\dots - \dots}{\dots - \dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$S_4 = \frac{U_{\dots} - U_1}{r - 1}$

Berdasarkan kolom ke-3 diperoleh:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{U_{n+1} - U_1}{r - 1} \\
 &= \frac{ar^{(n+1)-1} - a}{r - 1} \\
 &= \frac{ar^n - a}{r - 1} \\
 S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}
 \end{aligned}$$

Rumus Deret Geometri

Rumus untuk menghitung jumlah suku-suku deret geometri adalah

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ atau } S_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r} \text{ dengan } r \neq 1$$

Keterangan:

S_n = jumlah n suku pertama deret r = rasio

a = suku pertama n = banyaknya suku

Contoh 1.7

Jumlah penonton sebuah pertunjukan teater mengalami peningkatan setiap minggu dengan pola barisan geometri. Penonton pada minggu pertama tercatat sebanyak 80 orang, sedangkan total jumlah penonton selama empat minggu awal mencapai 1.340 orang. Tentukan rasio pertumbuhan jumlah penonton setiap minggu serta hitung jumlah penonton pada minggu keempat.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

Barisan geometri, suku pertama $a_1 = 80$

Jumlah 4 suku pertama $S_4 = 1.340$

Ditanyakan:

Rasio (r)

Suku ke-4 (a_4)

Langkah pertama:

Jumlah suku pertama barisan geometri:

$$S_n = a_1 = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$\text{Untuk 4 suku: } 1.340 = \frac{r^4 - 1}{r - 1}$$

Langkah kedua:

Bagi kedua sisi dengan 80, yaitu $\frac{r^4 - 1}{r - 1} = 16,75$

Langkah ketiga:

Faktorkan $(r^4 - 1) = (r - 1)(r^3 + r^2 + r + 1)$, sehingga:

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 16,75 \quad r^3 + r^2 + r - 15,75 = 0$$

Langkah keempat:

Dengan pendekatan, coba $r = 2$:

$$2^3 + 2^2 + 2 = 8 + 4 + 2 = 14 \text{ (lebih kecil)}$$

Coba $r = 2,1$:

$$2,1^3 + 2,1^2 + 2,1 = 9,261 + 4,41 + 2,1 = 15,771 \approx 15,75$$

Sehingga, rasio pertumbuhannya $r \approx 2,1$

Langkah kelima:

Hitung jumlah penonton minggu ke-4:

$$a_4 = a_1 \times r^3 = 80 \times (2,1)^3 \approx 80 \times 9,261 = 740,88 \approx 741 \text{ orang}$$

Jadi, rasio pertumbuhan tiap minggu $r \approx 2,1$; dan jumlah penonton minggu keempat $a_4 \approx 741$ orang.

3. Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri tak hingga (*infinite geometric series*) adalah deret geometri yang jumlah sukunya tidak terbatas. Hal ini berarti, kamu menjumlahkan suku-suku suatu barisan geometri dan menghasilkan hasil tanpa henti.

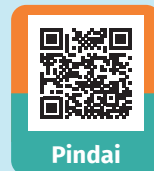


Ayo, Bereksplorasi dan Menggunakan Teknologi



Petunjuk

1. Pindai kode respons cepat atau akses tautan yang telah disediakan.
2. Amati dan pelajari aktivitas yang ada pada tautan Geogebra tersebut.
3. Kamu dapat melakukan eksplorasi dengan menjawab pertanyaan maupun menemukan solusi dari permasalahan yang diberikan.



Pindai

<https://bukupusbuk.id/s/mtk12geogebra2>

Setelah mempelajari aktivitas tersebut, coba analisis bersama dengan teman sebangkumu mengenai informasi penting yang kamu temukan.



Ayo, Berpikir Kreatif

Dapatkan kamu membuat pola pembagian serupa tetapi dengan rasio selain $\frac{1}{2}$? Misalnya $\frac{1}{3}$? Apa yang akan terjadi dengan jumlah totalnya?

Contoh 1.8

Suatu bola tenis dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 5 meter. Setiap kali bola memantul, bola mencapai ketinggian $\frac{3}{5}$ dari ketinggian yang dicapai sebelumnya. Tentukan panjang lintasan yang terjadi sampai bola berhenti.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui barisan lintasan yang dilalui bola seperti berikut.

Lintasan 1 : 5 meter

Lintasan 2 : $\frac{3}{5} \times 5 = 3$ meter (pantulan 1)

Lintasan 3 : $\frac{3}{5} \times 3 = 1,8$ meter (pantulan 2)

dan seterusnya.

Panjang lintasan dihitung menggunakan rumus geometri tak hingga berikut.

$$S_{\infty} = \frac{a}{(1-r)}$$

Berdasar soal, diketahui $a = 3$ (tinggi pantulan pertama) dan $r = \frac{3}{5}$.

Karena bola tenis memantul 2 kali saat jatuh, maka panjang lintasan untuk pantulan adalah

$$\begin{aligned} 2S_{\infty} &= 2 \times \frac{3}{\left(1 - \frac{3}{5}\right)} \\ &= 2 \times \frac{3}{\left(\frac{5}{5} - \frac{3}{5}\right)} \\ &= 2 \times \frac{3}{\frac{2}{5}} \\ &= 2 \times 3 \times \frac{5}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$

Ditemukan bahwa panjang lintasan untuk pantulan adalah 15 meter. Jadi, total panjang lintasan seluruhnya adalah $5 + 15 = 20$ meter.

Latihan 1.4

1. Suatu deret geometri memiliki suku pertama $a = 5$ dan rasio $r = 2$. Hitunglah jumlah 6 suku pertama deret tersebut.
2. Suku ke-4 suatu deret geometri adalah 108 dan suku ke-6 adalah 972. Tentukan suku pertama (a) dan rasio (r) deret tersebut.
3. Suatu bola dijatuhkan dari ketinggian 10 meter. Setiap pantulan mencapai $\frac{2}{3}$ dari tinggi sebelumnya. Hitung total seluruh jarak yang ditempuh oleh bola tersebut hingga berhenti.
4. Galang berpendapat bahwa deret $3 + 6 + 12 + 24 + \dots$ dengan $r = 2$ memiliki jumlah tak hingga $S_{\infty} = -3$. Apakah pendapat Galang benar? Jelaskan.

5. Diberikan dua deret geometri. Deret A dengan $a = 2$, $r = 3$, dan $n = 4$, sedangkan deret B dengan $a = 6$, $r = 2$ dan $n = 3$. Manakah deret yang memiliki jumlah suku lebih besar? Buktikan.

C. Bunga Tunggal

Konsep simpan dan pinjam di suatu bank akan memunculkan bunga. Ketika kamu melakukan simpanan atau menabung, maka akan mendapatkan bunga. Begitu juga, saat kamu melakukan pinjaman, juga akan mendapatkan bunga. Menurut Otoritas Jasa Keuangan, bunga simpanan adalah balas jasa dari bank kepada nasabah atas jasa nasabah menyimpan uangnya di bank. Sementara itu, bunga pinjaman adalah balas jasa yang ditetapkan bank kepada peminjam atas pinjaman yang didatarkannya. Ada dua jenis bunga, yaitu bunga tunggal dan bunga majemuk.



Ayo, Bereksplorasi

Angga adalah seorang siswa SMA yang rajin dan memiliki semangat menabung. Setelah menerima hadiah ulang tahun berupa uang tunai sebesar Rp1.000.000,00 dari orang tuanya, ia memutuskan untuk tidak menghabiskannya begitu saja. Ia pergi ke bank dan membuka rekening tabungan khusus pelajar. Petugas bank menjelaskan bahwa tabungannya akan mendapatkan bunga tetap sebesar 5% setiap tahun dari saldo awal. Bunga tersebut akan langsung ditambahkan ke saldo tabungannya setiap akhir tahun.

Angga pun mulai menghitung, jika ia tidak menarik uang itu selama beberapa tahun, berapa perkiraan total uang yang akan terkumpul? Ia berpikir, “Kalau setiap tahun bertambah 5% dari saldo awal, maka tahun depan tabungannya lebih banyak dari sekarang, dan tahun berikutnya akan lebih banyak lagi karena bunganya terus bertambah setiap tahun.”

Rasa ingin tahu itu mendorong Angga untuk menghitung dan memahami bagaimana uangnya tumbuh dari waktu ke waktu. Ia kemudian belajar bahwa ini merupakan contoh pertumbuhan berdasarkan barisan dan deret aritmetika, karena bunga bertambah secara berkala dan bergantung pada jumlah sebelumnya.

Bantulah Angga dalam membuat perhitungan nilai pertambahan tabungannya setiap tahun dengan melengkapi Tabel 1.5 berikut ini.

Tabel 1.5 Perhitungan Nilai Tabungan Angga

Tahun	Bunga	Nilai Uang
1	$5\% \times 1.000.000 = 50.000$	$1.000.000 + 50.000 = 1.050.000$
2	$5\% \times 1.000.000 = \dots$	$1.050.000 + 50.000 = \dots$
3	...	...
4	...	...
5	...	...

Perhatikan pada kolom nilai uang. Barisan jenis apakah yang dibentuk oleh nilai uang yang disimpan dengan bunga tunggal?

Barisan yang terbentuk yaitu barisan

dengan $U_1 = \dots$

dan $b = \dots$

Jadi, dapat ditentukan bentuk umum untuk nilai uang yang telah disimpan dalam n tahun.

$$U_n = \dots$$

Total nilai uang yang disimpan di bank dengan bunga tunggal akan membentuk deret

Dengan demikian, secara matematis bunga tunggal disimbolkan (B) dengan rumus

$$B = M \times p\% \times n$$

Keterangan:

B = bunga tunggal

$p\%$ = persentase bunga

M = modal awal/simpanan awal

n = periode/tahun

Contoh 1.9

Zaka memulai bisnis kecil-kecilan ikan cupang hias dan memperoleh keuntungan pertama sebesar Rp2.000.000,00. Uang tersebut ia simpan di koperasi desa yang memberikan bunga tunggal sebesar 5% per tahun. Bunga diberikan sekali setahun dan langsung ditambahkan ke total simpanan sebelumnya. Berapa total uang yang didapatkan Zaka selama 4 tahun?

Alternatif penyelesaian:

Diketahui beberapa hal berikut.

Simpanan pertama (M) = Rp2.000.000,00

Persentase bunga ($p\%$) = 5%

Terlebih dahulu ditentukan besar bunga yang didapatkan selama 4 tahun, yaitu

$$\begin{aligned} B &= M \times p\% \times n \\ &= 2.000.000 \times 0,05 \times 4 \\ B &= 400.000 \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \text{Total} &= M + B \\ &= 2.000.000 + 400.000 \\ &= 2.400.000 \end{aligned}$$

Total uang yang didapatkan Zaka selama 4 tahun sebesar Rp2.400.000,00.



Ayo, Berefleksi

Berikan centang (✓) pada kolom yang menurutmu sesuai dengan pemahamanmu setelah mempelajari materi barisan dan deret.

Pernyataan Asesmen Diri	Sudah Memahami	Belum Memahami
Membedakan barisan aritmetika dengan barisan geometri.		
Menentukan suku ke- n dari suatu barisan aritmetika.		
Menentukan suku- n dari suatu barisan geometri.		
Menentukan jumlah n suku pertama dari suatu barisan aritmetika.		
Menentukan jumlah n suku pertama dari suatu barisan geometri.		
Membedakan bunga tunggal.		
Menghitung bunga tunggal.		

Uji Kompetensi Bab 1

1. Suatu barisan aritmetika 4, 1, -2, -5, Suku ke-10 dari barisan tersebut adalah
2. Suku ke- n dari suatu barisan bilangan dirumuskan $U_n = 15 - 3n$. Suku ke-15 dari barisan bilangan tersebut adalah
3. Tempat duduk di suatu gedung diatur mulai dari barisan depan ke belakang dengan banyak baris di belakang 3 kursi lebih banyak dari baris di depannya. Jika dalam gedung tersebut terdapat 12 baris kursi dan baris terdepan ada 8 kursi, jumlah seluruh kursi dalam gedung tersebut ada
4. Seorang petani jeruk mencatat hasil panennya selama 11 hari pertama. Setiap harinya, hasil panen mengalami kenaikan tetap dimulai hari pertama, kedua, ketiga berturut-turut 15 kg, 17 kg, 19 kg, dan seterusnya. Jumlah hasil panen selama 11 hari pertama adalah
5. Diketahui deret bilangan $10 + 11 + 12 + 13 + \dots + 99$. Dari deret bilangan tersebut, jumlah bilangan yang habis dibagi dua tetapi tidak habis dibagi lima adalah
6. Raka mengikuti program Youth Creative Entrepreneur di sekolahnya. Untuk membeli peralatan produksi awal, ia memperoleh dana talangan usaha sebesar Rp2.500.000,00 dari koperasi pemuda. Koperasi tersebut menerapkan bunga sederhana sebesar 4% per tahun dan memberikan keringanan berupa angsuran bulanan tetap selama 2 tahun agar para peserta tidak terbebani. Sebagai bentuk tanggung jawab finansial, Raka perlu menghitung besar cicilan bulanan yang harus ia bayarkan agar pinjaman tersebut lunas sesuai perjanjian. Berapakah cicilan yang harus dibayarkan Raka setiap bulan?
7. SMA Abisatya mempersiapkan pameran seni tahunan, panitia menyiapkan sebuah instalasi seni cahaya yang akan dipasang di aula sekolah. Instalasi tersebut menggunakan lima batang pipa logam sebagai rangka utama, dengan panjang pipa yang dibuat berbeda-beda agar tampilan visual terlihat proporsional dan menarik. Untuk mencapai desain tersebut, panjang kelima pipa disusun mengikuti pola pertumbuhan beraturan sehingga membentuk barisan geometri dari pipa yang paling pendek hingga yang paling panjang. Diketahui bahwa pipa terpendek memiliki panjang 4 cm, sedangkan pipa terpanjang memiliki panjang 324 cm. Seluruh pipa tersebut berasal dari satu batang pipa logam utuh yang kemudian

dipotong menjadi lima bagian sesuai rancangan. Berdasarkan informasi tersebut, tentukan panjang batang pipa semula sebelum dipotong.

8. Sebuah gedung konvensi pemuda akan digunakan untuk menyelenggarakan acara Student Leadership Summit. Panitia menyusun tempat duduk peserta dalam barisan bertingkat, di mana setiap baris di bagian belakang memiliki 2 kursi lebih banyak dibandingkan baris di depannya agar seluruh peserta dapat melihat panggung dengan jelas. Berdasarkan rancangan denah tempat duduk, diketahui bahwa perbandingan jumlah kursi pada baris ke-5 dan baris ke-13 adalah 1 : 2, serta baris terakhir merupakan baris dengan jumlah kursi terbanyak, yaitu 50 kursi. Untuk keperluan persiapan logistik, panitia perlu menentukan jumlah seluruh kursi yang tersedia di gedung tersebut. Berdasarkan informasi tersebut, tentukan total kursi pada ruang pertemuan itu.
9. Kenaikan harga barang-barang disebut inflasi. Berdasarkan analisis, ekonomi Indonesia akan mengalami inflasi sebesar 8% per tahun selama 5 tahun mendatang. Apabila harga emas sekarang ini adalah Rp2.000.000,00 per gram, tentukan harga emas tersebut empat tahun kemudian.
10. Bakteri membelah menjadi 2 bagian setiap 4 jam. Jika pada pukul 12.00 banyaknya bakteri 1.000 unit, berapa banyaknya bakteri pada pukul 20.00 untuk hari yang sama?

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, berikan tanggapan atas beberapa pertanyaan di bawah ini.

1. Strategi apa yang kamu gunakan untuk memahami materi barisan dan deret?
2. Apakah strategi tersebut telah membantu kamu belajar lebih mudah?
3. Menurutmu, bagian mana dari materi barisan dan deret paling mudah? Selain itu, bagian mana yang masih sulit kamu pahami?
4. Menurutmu, apa manfaat mempelajari barisan dan deret untuk kehidupanmu di masa depan?

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
REPUBLIK INDONESIA, 2025

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII (Edisi Revisi)

Penulis: Mohammad Tohir, dkk

ISBN: 978-634-00-3118-8 (jil.3 PDF)

Bab 2

Investasi dan Pinjaman



Bayangkan kamu memiliki sejumlah uang atau aset dan kamu ingin uang atau aset tersebut bertumbuh seiring waktu. Apa saja pilihan yang kamu miliki?

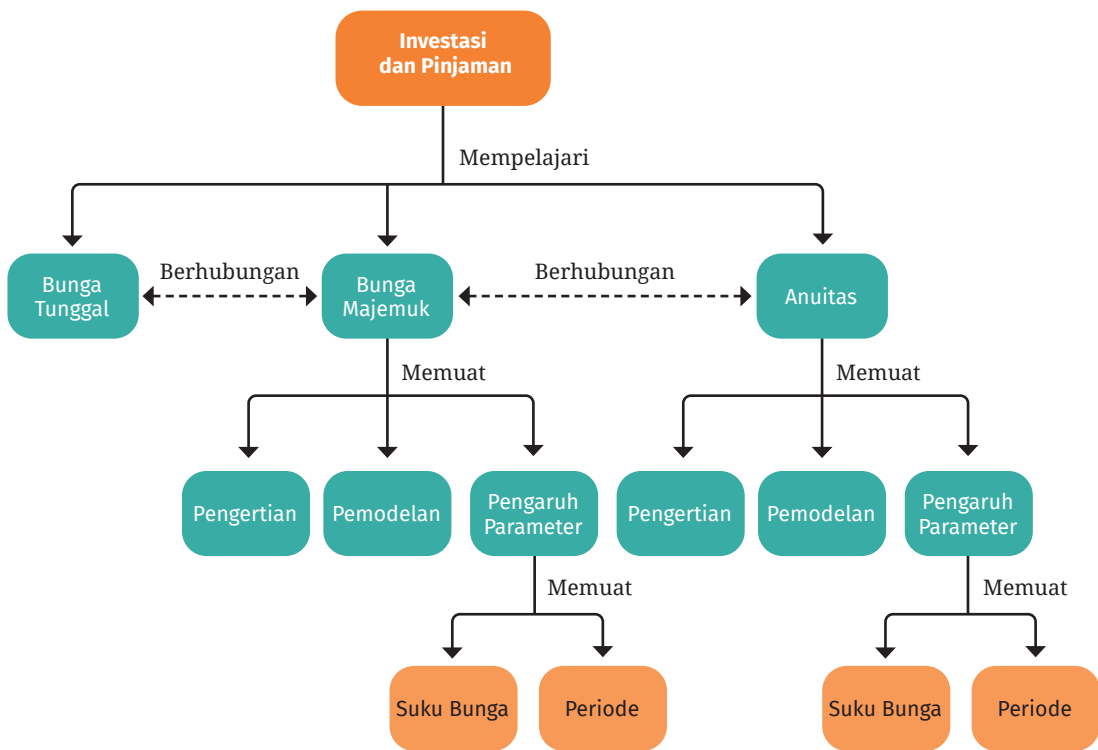
Tujuan Pembelajaran

Setelah kamu mempelajari bab ini, diharapkan dapat menjelaskan pengertian dan memodelkan bunga majemuk dan anuitas pada investasi dan pinjaman, serta dapat menganalisis pengaruh parameter dalam model numerik dan grafis.

Kata Kunci

- ▶ Bunga majemuk
- ▶ Anuitas
- ▶ Investasi
- ▶ Pinjaman
- ▶ Suku bunga

Peta Konsep



A. Suku Bunga Tunggal



Ayo, Mengingat Kembali

Masyarakat Indonesia tentu sudah tidak asing dengan koperasi, dalam kehidupan sehari-hari, bahkan ketika kamu di sekolah, seringkali berinteraksi dengan koperasi. Koperasi merupakan salah satu wadah atau sarana perputaran kegiatan ekonomi di masyarakat. Salah satu jenis koperasi yang umum ialah koperasi simpan pinjam. Koperasi simpan pinjam yang sudah dikenal ini, biasanya menggunakan bunga tunggal sebagai metode dalam transaksi pembiayaan. Bunga tunggal merupakan imbalan yang diberikan oleh koperasi kepada nasabah dalam periode tertentu secara tunggal. Selain koperasi, juga terdapat lembaga keuangan lainnya, seperti bank, yang juga menjadi bagian dari perputaran ekonomi masyarakat.

Suku bunga dapat diartikan sebagai balas jasa yang diberikan nasabah kepada bank atas peminjaman uang dari bank atau balas jasa yang diberikan pihak bank kepada nasabah atas penyimpanan uang di bank.



Gambar 2.1 Koperasi Simpan Pinjam



Ayo, Bereksplorasi

1. Berpasanglah dengan temanmu untuk menyelesaikan kedua masalah (Masalah A dan Masalah B) tentang bunga tunggal.
2. Tentukan bersama-sama data yang diketahui dari masing-masing soal, seperti modal awal, persentase bunga, dan lama waktu penyimpanan.
3. Lengkapilah langkah-langkah perhitungan bunga tunggal sesuai rumus:
$$B = M \times p\% \times n$$

4. Hitunglah **jumlah bunga (B)** yang diperoleh dan modal akhir (M_{akhir}) pada masing-masing soal.
5. Periksa kembali hasil perhitunganmu bersama pasanganmu, lalu tuliskan jawaban akhir dalam kalimat lengkap.
6. Diskusikan hasil pekerjaanmu dan cocokkan dengan pasangan lainnya untuk memastikan kebenaran jawaban.

Masalah A

Pak Roni merupakan anggota koperasi simpan pinjam. Pak Roni menyimpan sejumlah uang di koperasi sebesar Rp15.000.000,00 dengan bunga koperasi 1% per tahun. Berapa jumlah simpanan Pak Roni setelah 5 tahun?

Alternatif penyelesaian:

Berdasarkan informasi tersebut, langkah pertama yang dilakukan adalah dengan menentukan besar bunga yang didapat oleh pak Roni.

$$B = M \times p\% \times n$$

$$B = 15.000.000 \times \dots\% \times \dots$$

$$B = \dots$$

Selanjutnya, uang simpanan yang dimiliki Pak Roni setelah bunga yang didapat adalah sebagai berikut.

$$M_{akhir} = M_{awal} + B$$

$$M_{akhir} = 15.000.000 + \dots$$

$$M_{akhir} = \dots$$

Jadi, modal akhir yang akan didapatkan oleh Pak Roni selama 5 tahun sebesar Rp....

Masalah B

Pak Bayu merupakan anggota koperasi "Maju Bersama". Beliau menyimpan modal awal sebesar Rp1.000.000,00 di koperasi tersebut. Koperasi memberikan bunga tunggal sebesar 18% per tahun untuk simpanan

anggota. Pak Bayu menyimpan modalnya selama 8 bulan. Hitunglah berapa besar bunga yang akan diterima dan berapa total simpanan Pak Bayu setelah 8 bulan?

Alternatif penyelesaian:

$$M_{awal} = \text{Rp}1.000.000,00$$

$$p = 18\% \text{ per tahun maka didapat } p = \frac{18}{12} \% \text{ per bulan}$$

$$n = 8 \text{ bulan}$$

$$B = M \times p\% \times n$$

$$B = \dots \times \frac{18}{12} \% \times \dots$$

$$B = \dots$$

sehingga

$$M_{akhir} = M_{awal} + B$$

$$M_{akhir} = \dots + \dots$$

$$M_{akhir} = \dots$$

Jadi, modal akhir yang akan didapatkan setelah 8 bulan adalah Rp....

Dari penyelesaian kedua soal tersebut, dapat disimpulkan bahwa besar bunga dan modal akhir bertambah secara linear sesuai lama waktu penyimpanan, karena bunga tunggal tidak dihitung dari modal yang sudah ditambahkan bunga sebelumnya. Pemahaman tentang bunga tunggal ini membantu kamu dalam mengambil keputusan keuangan sederhana, seperti menabung atau meminjam uang di koperasi atau bank.

Kamu telah mempelajari dan menerapkan bunga tunggal. Dalam kehidupan sehari-hari, seseorang harus memutuskan apakah akan menginvestasikan atau meminjam uang atau aset yang dimiliki. Tentu saja, konsep bunga tunggal yang kamu pelajari tidaklah cukup, sehingga diperlukan alat tambahan lainnya, seperti bunga majemuk dan anuitas, yang juga sering digunakan dalam industri perbankan.

B. Investasi Bunga Majemuk



Ayo, Bereksplorasi

Pernahkah kamu menabung di bank? Tahukah kamu tentang deposito? Salah satu produk dari suatu bank adalah deposito. Deposito adalah produk dari proses kerja sama antara nasabah dengan pihak bank untuk menaruh sejumlah uang dalam jangka waktu tertentu sesuai waktu yang disepakati bersama antara pihak bank dengan nasabah. Kerja sama ini akan memberikan keuntungan untuk kedua pihak, baik pihak bank maupun nasabahnya.



Gambar 2.2 Deposito

Dalam praktiknya, sering kali bank memberikan bunga, dalam hal ini adalah bunga majemuk. Bunga majemuk sering digunakan untuk menghitung bunga pada investasi jangka panjang, seperti deposito, reksa dana, dan saham.

Bunga majemuk adalah perhitungan imbalan jasa yang dilakukan berdasarkan besar modal pada periode bunga berjalan. Perhitungan menggunakan bunga majemuk menghasilkan besar bunga pertama yang berbeda dengan besar bunga kedua, ketiga, dan seterusnya.



Ayo, Mencoba

Pada perhitungan sebelumnya terkait bunga tunggal, modal akhir yang didapat mengacu pada bunga dengan persentase yang sama tiap periodenya. Untuk lebih memahaminya, kamu dapat menyelesaikan perhitungan berikut secara mandiri. Kemudian, jawablah beberapa pertanyaan di bawahnya.

Tabel 2.1 Perhitungan Bunga Tunggal

Tahun ke	Bunga (Rp)	Modal akhir (Rp)
0	0	15.000.000,00
1	150.000,00	15.150.000,00
2	300.000,00	15.300.000,00
3	450.000,00	15.450.000,00
4	...	...
5	...	...
6	...	...
...	...	...

Berdasarkan Tabel 2.1, coba kamu diskusikan dengan temanmu dan jawab beberapa pertanyaan berikut.

1. Berapakah bunga yang didapat pada tahun ke-6 hingga ke-10?

2. Dapatkah kalian menemukan modal akhir yang didapat selama kurun waktu 6 hingga 10 tahun?

3. Apa yang dapat kalian simpulkan dari kegiatan tersebut? Berikan pendapat dengan kalimat kalian sendiri?



Ayo, Berkolaborasi

Perhatikan dan diskusikan masalah berikut. Apa yang kalian temukan? Bandingkan hasilnya.

Pak Roni menabung uang di bank sebesar Rp15.000.000,00 dengan bunga majemuk 1% per tahun selama 5 tahun. Dari hasil perhitungan pihak bank, ia akan memperoleh investasi sebagai berikut.

Tabel 2.2 Perhitungan Bunga Majemuk

Tahun ke	Bunga (Rp)	Modal akhir (Rp)
0	0	15.000.000,00
1	150.000,00	15.150.000,00
2	151.500,00	15.301.500,00
3	153.015,00	15.454.515,00
4	154.545,00	15.609.060,00
5	156.091,00	15.765.151,00
6	...	...
7	...	...
...	...	...
N	...	...

Berdasarkan Tabel 2.2, terlihat bahwa pada tahun pertama mendapat bunga 1% sebesar Rp150.000,00 dari modal awal Rp15.000.000,00.

Misalkan B_1 : bunga pada tahun pertama

M_1 : modal pada tahun pertama

► $B_1 = 1\% \times 15.000.000,00 = \dots$

$M_1 = 15.000.000,00 + B_1 = 15.000.000,00 + \dots = \dots$

Jadi, modal akhir yang didapat pada tahun pertama sebesar Rp....

Selanjutnya, pada tahun kedua bunga 1% dikenakan kembali dengan menggunakan modal awal pada tahun pertama Rp15.150.000,00. Dengan demikian, dapat ditulis:

B_2 : bunga pada tahun kedua

M_2 : modal pada tahun kedua

► $B_2 = 1\% \times 15.150.000,00 = \dots$

$M_2 = 15.150.000,00 + B_2 = 15.150.000,00 + \dots = \dots$

Jadi, modal akhir yang didapat pada tahun kedua sebesar Rp....

Demikian seterusnya untuk tahun ketiga hingga tahun berikutnya. Dengan demikian, dapatkah kalian menentukan bunga dan modal akhir yang didapat pada tahun ke-6, tahun ke-7, tahun ke-8, ..., hingga tahun ke- n ?



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menggunakan kalkulator *scientific* untuk memudahkan dalam membuat perhitungan pada Tabel 2.2. Selain itu, kamu dapat menggunakan aplikasi lain secara *online*. Berikut tautan untuk mengakses salah satu kalkulator *online* tersebut: <https://bukupusbuk.id/s/kaldesmos>.



Pindai

Sebelum menggunakan kalkulator, sebaiknya mintalah izin kepada guru.

Petunjuk:

Siapkan kalkulator *scientific*. Jika menggunakan kalkulator *online*, kamu bisa membuka internet pada gawai atau laptop. Ketikkan tautan atau *scan QR code* yang disediakan. Kerjakan soal dengan bantuan kalkulator. Gunakan kalkulator *online* dengan bijak dan mintalah izin atau arahan dari gurumu.

Rumus Bunga Majemuk

Perhatikan kembali, jika suatu modal M dengan bunga $p\%$ per tahun, maka dapat ditulis

- ▶ 1 tahun modal menjadi = $M + \text{bunga}$

$$M_1 = M + M \times p = M(1 + p)$$

- ▶ 2 tahun modal menjadi = $M_1 + \text{bunga}$

$$M_2 = M(1 + p) + M(1 + p) \times p = M(1 + p)(1 + p) = M(1 + p)^2$$

- ▶ 3 tahun modal menjadi = $M_2 + \text{bunga}$

$$M_3 = M(1 + p)^2 + M(1 + p)^2 \times p = M(1 + p)^2(1 + p) = M(1 + p)^3$$

Dapatkah kalian melanjutkan untuk tahun ke-4, ke-5 dan seterusnya hingga tahun ke- n ?

Setelah melakukan kegiatan tersebut kalian telah menemukan pola uraian di atas, maka pada n tahun modal menjadi sebuah rumus untuk menentukan model perhitungan bunga majemuk

$$M_n = M \times (1 + p)^n$$

Keterangan :

M_n : modal akhir/simpanan akhir p : persentase bunga

M : modal awal/simpanan awal n : periode

Contoh 2.1

Modal sebesar Rp5.000.000,00 dibungakan dengan bunga majemuk 10% per tahun. Tentukan modal akhir dan bunga yang diperoleh setelah 6 tahun.

Alternatif penyelesaian:

$$M = \text{Rp}5.000.000,00$$

$$p = 10\% \text{ per tahun} = 0,1 \text{ per tahun}$$

$$n = 6 \text{ tahun}$$

$$\begin{aligned} M_n &= M (1 + p)^n = 5.000.000 (1 + 0.1)^6 \\ &= 5.000.000 (1,1)^6 \\ &= 8.857.805 \end{aligned}$$

$$\text{Bunga} = 8.857.805 - 5.000.000 = 3.857.805$$

Jadi, modal akhir yang akan didapatkan setelah 6 tahun adalah Rp8.857.805,00 dan bunga yang didapat adalah Rp3.857.805,00.



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menggunakan kalkulator *scientific* untuk membantu perhitungan. Kalkulator *scientific* memiliki fitur yang dapat digunakan untuk berbagai aplikasi yang memerlukan perhitungan yang rumit.

Sebelum menggunakan kalkulator, sebaiknya mintalah izin kepada guru.



Pindai

<https://bukupusbuk.id/s/kaldesmos>

Contoh 2.2

Ahmad menabung uang di bank dengan bunga majemuk sebesar 3% per 4 bulan. Setelah 8 bulan menabung, saldo tabungan menjadi sebesar Rp2.121.800,00. Berapakah jumlah uang yang ditabung Ahmad semula?

Alternatif penyelesaian:

$p = 3\%$ per 4 bulan

$n = 8$ bulan, maka terjadi 2 periode 4 bulan, sehingga $n = 2$

$M = ?$

Misalkan jumlah saldo setelah 8 bulan adalah M_2 .

$$M_2 = M \times (1 + 3\%)^2$$

$$2.121.800 = M \times (1,03)^2$$

$$2.121.800 = M \times 1,0609$$

$$M = 2.000.000$$

Jadi, jumlah uang yang ditabung Ahmad semula adalah Rp2.000.000,00.



Tahukah Kalian

“Kekuatan bunga majemuk” (*compound interest*) sebagai keajaiban dunia ke-8 menurut Albert Einstein atau contoh nyata bagaimana investasi jangka panjang dengan bunga majemuk dapat menghasilkan kekayaan signifikan (misalnya, dana pensiun atau reksa dana).

C. Investasi Anuitas



Ayo, Bereksplorasi

Kamu telah mengamati bahwa jumlah saldo suatu tabungan bertambah dengan adanya bunga. Jika diperhatikan, pada kondisi tersebut saldo tabungan hanya masuk satu kali di awal. Bagaimana jika seseorang rutin berinvestasi/menabung setiap bulan? Apakah perhitungan bunganya akan sama?



Gambar 2.3 Menabung di Bank

Anuitas merupakan istilah yang tidak asing dalam bidang keuangan. Anuitas sering terdengar ketika mengambil pinjaman di bank. Petugas kredit di bank biasanya menjelaskan mengenai konsep anuitas kepada nasabahnya. Istilah ini memang sangat melekat pada produk perbankan, terutama yang berkaitan dengan kredit, simpanan, serta investasi jangka panjang. Tahukah kamu, apa itu anuitas dan apa saja jenis-jenisnya?

Anuitas adalah sistem pembayaran atau penerimaan yang dilakukan pada periode waktu yang teratur dalam jumlah yang sama atas suatu investasi. Periode pembayaran atau penerimaan dapat dilakukan setiap bulan, triwulan, kuartal, semester, atau per tahun.

Pada umumnya, terdapat dua jenis anuitas, yaitu anuitas terutang dan anuitas biasa. Anuitas terutang adalah anuitas yang pembayarannya atau penerimaannya dilakukan di awal setiap periode, sedangkan anuitas biasa adalah anuitas yang pembayarannya atau penerimaannya dilakukan di akhir setiap periode.

Investasi dengan anuitas meliputi sistem penyeteroran tabungan yang dilakukan pada periode waktu yang teratur dalam jumlah yang sama ataupun sistem penerimaan sejumlah uang yang sama pada periode waktu yang teratur dari tabungan yang telah terkumpul sebelumnya. Bunga yang dikenakan merupakan imbal hasil dari pihak bank yang diterima oleh pihak penabung. Untuk mengetahui perhitungan anuitas yang merupakan penyeteroran rutin pada simpanan, perhatikan penjelasan dari masalah berikut.



Ayo, Berpikir Kritis

Affan seorang pengusaha yang rutin mendepositokan uangnya setiap tahun sebesar Rp20.000.000,00 di sebuah bank yang menawarkan bunga deposito 7,2% per tahun. Berikut adalah tabel yang menjelaskan besar tabungan deposito Affan tiap tahunnya.

Tabel 2.3 Perincian Tabungan Deposito Affan

Tahun	Saldo Masuk	Saldo Deposito (M_n)	Bunga (B_n)
0	M_n	Rp20.000.000,00	0
1	Rp20.000.000,00	Rp41.440.000,00	Rp1.440.000,00
2	Rp20.000.000,00	Rp64.423.680,00	Rp2.983.680,00
3	Rp20.000.000,00	Rp89.062.184,96	Rp4.638.504,96
4	Rp20.000.000,00	Rp115.474.662,28	Rp6.412.477,317
5	Rp20.000.000,00	Rp143.788.838,00	Rp8.314.175,684

Berdasarkan Tabel 2.3, setelah tahun pertama, tabungan deposito Affan menghasilkan bunga sebesar Rp1.440.000,00, sehingga tabungannya menjadi Rp21.440.000,00. Kemudian, ditambah dengan uang sebesar Rp20.000.000,00 sebagai tabungan rutin berikutnya menjadi Rp41.440.000,00. Uang tersebut dalam satu tahun menghasilkan bunga sebesar Rp2.983.680,00. Jika ditambahkan dengan saldo berjalan Rp41.440.000,00 dan saldo masuk Rp20.000.000,00, maka menjadi Rp64.423.680,00.

Bagaimana cara merumuskan permasalahan tersebut untuk mencari total uang yang terkumpul dalam beberapa periode menabung? Masalah tersebut dapat diselesaikan dengan sistem anuitas. Untuk lebih memahaminya, lakukan kegiatan berikut.



Ayo, Berkolaborasi

1. Bentuklah kelompok beranggotakan 2–4 orang.
2. Diskusikan permasalahan, jika seseorang rutin menabung dengan sistem anuitas sebesar A setiap tahun di bank, dengan bunga majemuk sebesar i per tahun selama n tahun. Berapakah jumlah tabungan orang tersebut dalam n tahun?
3. Lengkapilah tabel yang tersedia dengan nilai saldo setiap tahun berdasarkan rumus yang diberikan.
4. Diskusikan hasil pengisian tabel untuk menemukan jumlah tabungan setelah n tahun.

Tabel 2.4 Kegiatan Anuitas

Tahun ke- n	Anuitas Tahun ke- n	Masing-masing saldo setelah n Tahun (A_n)	Jumlah saldo setelah n Tahun S_n
0	A	$A(1+i)^n$	$A(1+i)^n$
1	A	$A(1+i)^{n-1}$	$A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^n$
2	A	$A(1+i)^{n-2}$	
3	A		
....			
$n-1$	A	$A(1+i)^{n(n-1)}$	
n	A	$A(1+i)^{n-n}$	

5. Tuliskan kesimpulan dari permasalahan tersebut.
6. Presentasikan hasil diskusi kelompok di depan kelas.

Perhitungan jumlah tabungan dapat dilakukan dengan menghitung nilai tabungan akhir setelah n tahun dari masing-masing anuitas sebesar A . Jumlah semua nilai tabungan akhir tersebut membentuk deret geometri dengan suku pertama A dan rasio $(1+i)$. Dengan demikian, total anuitas beserta bunganya membentuk deret geometri.

Misalkan jumlah tabungan seseorang setelah n tahun adalah S_n , maka:

$$S_n = A + A(1+i) + A(1+i)^2 + \dots + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^n$$

dengan menggunakan rumus Jumlah deret geometri $S = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1}$ dimana:

suku pertama: $a = A$

rasio: $r = (1+i)$

Jumlah suku : $k = n$

substitusikan,

$$S_n = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1},$$

sehingga diperoleh $S_n = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$



Kamu telah mempelajari cara menentukan nilai uang yang ditabung dengan sistem anuitas menggunakan konsep deret geometri. Sekarang, jika kamu bandingkan nilai sejumlah uang yang disimpan di rumah dan nilai sejumlah uang yang disimpan di bank dengan sistem bunga majemuk setelah dua atau tiga tahun, manakah yang lebih besar? Nilai uang yang disimpan di rumah tentu tidak akan berubah dari tahun ke tahun, sedangkan nilai uang yang disimpan di bank akan mengalami perubahan dan semakin bertambah di masa depan. Uang yang ditabung di bank dengan bunga akan bertambah nilainya dari waktu ke waktu. Oleh karena itu, perhitungan total uang yang ditabung dengan bunga dan sistem anuitas juga bisa disebut sebagai nilai masa depan (*Future Value*) yang dinotasikan dengan *FV*.

Keterangan:

$$A \quad : \text{nilai simpanan} \qquad n \quad : \text{periode}$$

Santi selalu menyisihkan uangnya sebesar Rp15.000.000,00 per tahun dan memasukkannya ke dalam rekening deposito dengan bunga majemuk 6% per tahun. Berapa nilai masa depan tabungan Santi dalam 10 tahun?

$$FV \approx 197.711.924$$

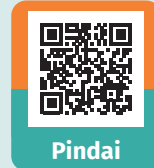
Jadi, nilai masa depan tabungan Santi dalam 10 tahun sebesar Rp197.711.924,00.



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menggunakan kalkulator *scientific* untuk membantu perhitungan. Kalkulator *scientific* memiliki fitur yang dapat digunakan untuk berbagai aplikasi yang memerlukan perhitungan yang rumit.

Sebelum menggunakan kalkulator, sebaiknya mintalah izin kepada guru.



Pindai

<https://www.desmos.com/scientific>



Ayo, Berpikir Kreatif

Kamu telah menentukan nilai masa depan suatu aset atau investasi dengan anuitas. Apakah kamu dapat menentukan nilai sekarang? Bagaimana hubungan antara anuitas nilai sekarang dengan nilai masa depan?

Perhatikan informasi berikut.

Aliyya seorang pengusaha wanita muda yang saat ini berusia 25 tahun. Jika suatu saat nanti pensiun, ia berharap tetap mendapat penghasilan yang berasal dari tabungannya. Aliyya ingin mendapatkan penghasilan sebesar Rp6.000.000,00 tiap bulan selama 10 tahun setelah pensiun. Ia memutuskan untuk menginvestasikan uangnya di bank. Bunga yang dikenakan bank adalah 12%. Analisislah besar uang tabungan yang harus ia persiapkan? Jika ia ingin mendapatkan penghasilan yang lebih besar, faktor apa saja yang harus dipersiapkan Aliyya?

Selain nilai masa depan, uang juga memiliki nilai pada saat sekarang atau biasa disebut dengan nilai sekarang (*Present Value*) dengan notasi PV. Nilai masa depan dan nilai sekarang adalah dua cara untuk menghitung nilai uang pada waktu yang berbeda. Pada konsep bunga majemuk, nilai sekarang merupakan besarnya tabungan awal, sedangkan nilai masa depan adalah besarnya tabungan akhir setelah dikenai bunga majemuk dalam waktu tertentu. Oleh karena itu, hubungan antara nilai sekarang dengan nilai masa depan dapat dituliskan dalam persamaan berikut.

$$FV = PV \times (1 + i)^n$$

Keterangan:

FV = nilai masa depan atau jumlah akhir

PV = nilai sekarang atau modal awal

i = suku bunga per periode

n = jumlah periode

Kamu telah mempelajari sistem penyeteroran rutin pada simpanan yang erat kaitannya dengan nilai masa depan. Sekarang, kamu akan mempelajari konsep anuitas pada simpanan yang meliputi sistem penerimaan sejumlah uang tabungan yang rutin dilakukan setiap periode tertentu. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.4

Seseorang menabung sejumlah uang di bank dan mendapat bunga majemuk 4% per tahun. Mulai dari tahun berikutnya, setiap tahun uang tabungan tersebut diambil Rp1.000.000,00 untuk keperluan hidup. Berapakah uang yang harus ditabung agar setiap tahun ia dapat mengambil Rp1.000.000,00 yang disimpan selama 10 tahun?

Alternatif penyelesaian:

Perhatikan bahwa menghitung besarnya uang tabungan yang diperlukan agar nantinya dapat diambil setiap bulan sebesar Rp1.000.000,00 selama 10 tahun sama halnya dengan memperkirakan nilai sekarang untuk tabungan tersebut.

$$A = 1.000.000$$

$$n = 10$$

$$i = 4\% = 0,04$$

Ingat kembali rumus untuk menghitung FV berikut.

$$FV = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \dots (1)$$

$$FV = PV \times (1+i)^n \quad \dots (2)$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), maka didapat penurunan rumus berikut.

$$PV \times (1+i)^n = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$PV = A \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)^{-n}$$

$$PV = A \times \frac{(1 - (1+i)^{-n})}{i}$$

Dengan demikian, besar uang yang harus ditabung dihitung sebagai berikut.

$$PV = 1.000.000 \times \frac{(1 - (1 + 0,04)^{-10})}{0,04}$$

$$PV = 1.000.000 \times \frac{0,3244358}{0,04}$$

$$PV = 8.110.895,78$$

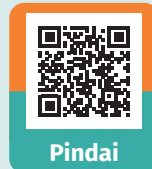
Jadi, agar seseorang dapat menerima anuitas sebesar Rp1.000.000,00 setiap tahun dari uang tabungan yang sudah disimpan selama 10 tahun, maka besar uang tabungan awal minimal sebesar Rp8.110.895,78.



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menggunakan kalkulator *scientific* untuk membantu perhitungan. Kalkulator *scientific* memiliki fitur yang dapat digunakan untuk berbagai aplikasi yang memerlukan perhitungan yang rumit.

Sebelum menggunakan kalkulator, sebaiknya mintalah izin kepada guru.



Pindai

<https://bukupusbuk.id/s/kaldesmos>



Tahukah Kalian

Bayangkan jika hari ini kalian membeli mie ayam dengan harga Rp15.000,00. Apakah harga mie ayam 15 tahun ke depan masih tetap sama?

Harga mie ayam tentu akan mengalami kenaikan.

Kenaikan harga barang dan jasa secara terus menerus dalam periode tertentu disebut inflasi.



Ayo, Berkolaborasi

Lakukan kegiatan berikut secara berkelompok untuk mendalami penerapan konsep anuitas dalam kehidupan sehari-hari.

1. Bentuk kelompok dan atur peran.
 - a. Buat kelompok beranggotakan 2–4 orang.
 - b. Bagi peran menjadi ketua, pencari data, pengolahan perhitungan, penulis laporan, dan penyaji (opsional).
2. Pilih tema skenario.
 - a. Tentukan rencana masa depan yang realistis, misalnya menabung untuk biaya pendidikan kuliah, membeli kendaraan atau rumah, modal buka usaha, atau liburan ke luar negeri.
 - b. Tulis latar belakang mengapa rencana itu dipilih.
 - c. Rinci data dan estimasi biaya.
3. Kumpulkan data dari sumber nyata (internet, brosur, wawancara orang tua, dan lain-lain).
 - a. Susun tabel biaya (misal, harga tiket, penginapan, uang kuliah, DP Rumah, dan lain-lain).
 - b. Sertakan asumsi suku bunga atau tingkat inflasi jika diperlukan.
4. Gunakan konsep anuitas.
 - a. Terapkan rumus nilai masa depan (*Future Value on Annuity*).
 - b. Hitung berapa tabungan per bulan yang diperlukan untuk mencapai target dana sesuai jangka waktu.
 - c. Tuliskan langkah perhitungan secara runtut.
5. Susun laporan kelompok (produk akhir).

Laporan sebaiknya berisi:

 - a. Kover (judul, nama anggota, kelas, dan tanggal).
 - b. Pendahuluan (latar belakang dan tujuan proyek).
 - c. Skenario Rencana Masa Depan (deskripsi lengkap tokoh, tujuan, waktu, dan alasan).
 - d. Tabel Rincian Biaya (dengan sumber data).

- e. Asumsi Perhitungan (bunga/tabungan, periode, dan lain-lain).
 - f. Perhitungan Anuitas (dengan langkah-langkah matematis).
 - g. Kesimpulan dan Saran Strategi (misalnya, tip mengatur keuangan, cara menghemat).
 - h. Lampiran (bukti pencarian data, brosur, grafik perhitungan, dan lain-lain).
6. Presentasi dan Diskusi
- a. Sajikan laporan dalam bentuk presentasi singkat (3–5 menit).
 - b. Gunakan media kreatif seperti *powerpoint*, infografik, poster, atau video singkat.
 - c. Setiap anggota berperan saat persentasi.
7. Refleksi
- Setelah persentasi, tulis refleksi kelompok.
- a. Apa yang dipelajari tentang konsep anuitas?
 - b. Tantangan yang dihadapi.
 - c. Manfaat perencanaan keuangan di kehidupan sehari-hari.

Latihan 2.1

1. Andi menyimpan uang sejumlah Rp5.000.000,00 di bank yang menawarkan bunga majemuk sebesar 6% setiap tahun dengan pembayaran setiap bulan. Setelah satu tahun, Andi akan mencairkan seluruh uangnya. Total nilai uang Andi sebesar

A. Rp5.203.535,00	D. Rp5.308.390,00
B. Rp5.229.553,00	E. Rp5.416.257,00
C. Rp5.281.979,00	
2. Seseorang berinvestasi saham di suatu aplikasi *online*. Modal usaha yang diberikan sebesar Rp5.000.000,00. Keuntungan yang didapat menggunakan suku bunga majemuk 15% per tahun. Hitunglah nilai akhir modal tersebut setelah 3 tahun.

Perhatikan informasi berikut untuk mengerjakan soal nomor 3–5.

Tabungan deposito adalah salah satu produk investasi yang ditawarkan oleh bank dengan bunga yang biasanya lebih besar dari bunga tabungan biasa. Seluruh bank di suatu wilayah menawarkan deposito dengan bunga 5%–7%

per tahun. Bank XYZ termasuk salah satu bank di wilayah tersebut dengan Ahmad dan Maya sebagai nasabahnya. Ahmad telah menjadi nasabah selama 5 tahun dan Maya telah menjadi nasabah selama 10 tahun.

3. Tentukanlah pernyataan berikut Benar atau Salah. Beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai.

Pernyataan	Benar	Salah
Bunga deposito sebesar 5% per bulan.		
Bunga deposito sebesar 1% per bulan.		
Bunga deposito sebesar 0,4% per bulan.		

4. Jika Maya rajin menyetorkan uang sebesar Rp25.000.000,00 setiap tahun ke rekening depositonya sejak ia membuat rekening di Bank XYZ, total uang yang dimiliki oleh Maya saat ini sebesar
5. Jika saldo deposito Ahmad menjadi Rp26.764.500,00, uang yang disetorkan oleh Ahmad mula-mula adalah
- A. Rp18.000.000,00
- B. Rp20.000.000,00
- C. Rp22.000.000,00
- D. Rp24.000.000,00
- E. Rp25.000.000,00
6. Seseorang membeli rumah dengan membayar Rp500.000.000,00. Sisanya sebesar Rp120.000.000,00 akan dibayar 2 tahun kemudian. Berapa nilai rumah tersebut jika diperhitungkan dengan suku bunga majemuk 5% setiap enam bulan?

D. Pinjaman Bunga Majemuk

Pada materi sebelumnya kamu telah mempelajari konsep investasi dengan bunga majemuk. Perhitungan bunga majemuk pinjaman memiliki prinsip yang sama dengan bunga majemuk investasi, yaitu berdasarkan uang pokok pada periode bunga berjalan. Namun, jika bunga pada simpanan cenderung akan bertambah seiring berjalannya waktu, bunga pada pinjaman justru akan berkurang. Perhatikan contoh berikut.



Ayo, Mencoba

Pernahkah kamu mencoba melakukan simulasi kredit secara mandiri? Simulasi kredit kini dapat dilakukan secara mandiri hanya tinggal mengakses dari gawaimu.

Perhatikan informasi berikut kemudian lengkapi titik-titik yang tersedia.

Jihan meminjam uang sebesar Rp15.000.000,00 di bank dengan bunga 12% per tahun yang diangsur selama 10 bulan. Dari hasil perhitungan pihak bank, ia memperoleh angsuran sebagai berikut.

Tabel 2.5 Angsuran Pinjaman

Angsuran Bulan ke- n	Sisa Pinjaman	Angsuran		Total Angsuran per bulan (Pokok + Bunga)
		Angsuran Pokok	Bunga (1%)	
1	Rp15.000.000,00	Rp1.500.000,00	Rp150.000,00	Rp1.650.000,00
2	Rp13.500.000,00	Rp1.500.000,00	Rp135.000,00	Rp1.635.000,00
3	Rp12.000.000,00	Rp1.500.000,00	Rp120.000,00	Rp1.620.000,00
4		Rp1.500.000,00	Rp105.000,00	
5		Rp1.500.000,00		
6		Rp1.500.000,00		
7		Rp1.500.000,00		
8	Rp4.500.000,00	Rp1.500.000,00		
9	Rp3.000.000,00	Rp1.500.000,00	Rp30.000,00	
10	Rp1.500.000,00	Rp1.500.000,00	Rp15.000,00	
Jumlah		Rp.....	Rp.....	Rp.....

Alternatif penyelesaian:

Perhatikan perhitungan besar bunga majemuk pinjaman tersebut yang dikenakan tiap bulannya. Persentase bunga adalah 12% per tahun atau 1% per bulan.

Perlu diketahui bahwa besar angsuran tiap bulan yang harus dibayarkan (belum termasuk bunga) adalah

$$= \text{Rp}15.000.000,00 : 10$$

$$= \text{Rp}1.500.000,00$$

- ▶ Pada bulan pertama, bunga 1% dikenakan pada uang pokok Rp15.000.000,00.

$$B_1 = 1\% \times 15.000.000 = \dots$$

Jadi, total angsuran pada bulan pertama adalah:

$$\begin{aligned} \text{Angsuran tanpa bunga} + \text{Bunga} &= \dots + \text{Rp}150.000,00 \\ &= \dots \end{aligned}$$

- ▶ Pada bulan kedua, bunga 1% dikenakan pada uang pokok pinjaman yang sedang berjalan yaitu sebesar Rp15.000.000,00 yang dikurangi angsuran sebelumnya sebesar Rp1.500.000,00 menjadi Rp13.500.000,00.

$$B_2 = 1\% \times 13.500.000 = \dots$$

Jadi, total angsuran pada bulan kedua adalah:

$$\begin{aligned} \text{Angsuran tanpa bunga} + \text{Bunga} &= \dots + \text{Rp}135.000,00 \\ &= \dots \end{aligned}$$

- ▶ Pada bulan ketiga, bunga 1% dikenakan pada uang pokok pinjaman yang sedang berjalan yaitu sebesar Rp13.500.000,00 yang dikurangi angsuran sebelumnya sebesar Rp1.500.000,00 menjadi Rp12.000.000,00.

$$B_3 = 1\% \times 12.000.000 = \dots$$

Jadi, total angsuran pada bulan kedua adalah:

$$\begin{aligned} \text{Angsuran tanpa bunga} + \text{Bunga} &= \dots + \text{Rp}120.000,00 \\ &= \dots \end{aligned}$$

- ▶ Perhitungan yang sama berlanjut hingga angsuran pada bulan ke-10.

$$B_k = [P_a - A \times (k - 1)] \times \frac{b}{12}$$

Keterangan:

B_k : besar bunga bulan ke- k

A : angsuran pokok

P_n : nilai akhir (total pinjaman + bunga)

k : bunga bulan ke- k

P_a : pokok pinjaman awal/modal awal

b : persentase bunga per tahun

Contoh 2.5

Pak Andi meminjam Rp20.000.000,00 di bank dengan suku bunga 10% per tahun ($\approx 0,83\%$ per bulan). Pinjaman itu akan dikembalikan dalam 5 bulan dengan sistem angsuran pokok tetap dan bunga menurun.

- Buatlah tabel angsuran per bulan.
- Hitung besaran bunga pada cicilan ke-3.

Alternatif penyelesaian:

- a. Tabel angsuran per bulan

Tabel 2.6 Tabel Angsuran Pak Andi per Bulan

Bulan	Saldo Awal (Rp)	Bunga (Rp)	Angsuran Pokok (Rp)	Total Angsuran (Rp)	Sisa Pinjaman (Rp)
1	20.000.000	166.600	4.000.000	4.166.600	16.000.000
2	16.000.000	133.280	4.000.000	4.133.280	12.000.000
3	12.000.000	99.960	4.000.000	4.099.960	8.000.000
4	8.000.000	66.640	4.000.000	4.066.640	4.000.000
5	4.000.000	33.320	4.000.000	4.033.320	0 (Lunas)

- b. Besar bunga pada cicilan ketiga dapat dihitung dengan menggunakan rumus

$$\begin{aligned} B_k &= [P_a - A \times (k-1)] \times b \\ &= [20.000.000 - 4.000.000 \times (3-1)] \times \frac{10\%}{12} \\ &= 12.000.000 \times 0,0083 \\ &= 99.960 \end{aligned}$$

Jadi, bunga pada cicilan ke-3 sebesar Rp99.960,00.

E. Pinjaman dengan Anuitas



Ayo, Bereksplorasi

Kamu telah memahami bahwa anuitas dapat digunakan untuk investasi. Kamu juga telah mempelajari sistem anuitas pada simpanan. Anuitas pada simpanan meliputi sistem penerimaan dan penyetoran, sedangkan pada pinjaman meliputi suatu sistem pembayaran yang dilakukan setiap satu periode tertentu dengan jumlah yang sama. Kali ini kamu akan mempelajari anuitas yang sering dimanfaatkan dalam kehidupan sehari-hari, yakni anuitas pinjaman.

Anuitas pada pinjaman sangat erat kaitannya dalam kehidupan masyarakat. Beberapa contoh penerapan anuitas pada pinjaman, misalnya pembayaran kendaraan bermotor dengan kredit, pembayaran KPR (Kredit Perumahan Rakyat), dan asuransi pendidikan.

Anuitas pada kasus pinjaman biasanya merupakan sistem pembayaran yang dilakukan pada periode waktu yang teratur dalam jumlah yang sama atas suatu pinjaman. Pembayaran anuitas (A) terdiri atas bagian angsuran pinjaman pokok yang harus dibayarkan (a) dan bagian bunga (b). Oleh karena itu, hubungan antara besar anuitas, angsuran pokok, dan bunga angsuran dapat dituliskan ke dalam persamaan berikut.

$$\text{Anuitas } (A) = \text{Angsuran } (a) + \text{Bunga } (b)$$

Untuk lebih memahaminya, pelajarilah penyelesaian permasalahan berikut.



Ayo, Mencoba

Bulan ini Andi akan membeli sepeda motor seharga Rp10.000.000,00 dengan cara meminjam uang di bank. Andi akan membayar angsuran motornya dengan metode pembayaran yang sama tiap bulannya. Dalam pelunasan tersebut diberikan anuitas bulanan sebesar Rp2.000.000,00 dengan bunga 12% per tahun.



Dapatkan kamu membantu melengkapi tabel mekanisme pembayaran yang akan diperoleh Andi? Kerjakan secara mandiri, gunakanlah kalkulator jika diperlukan.

Perhatikan langkah berikut.

Pinjaman (M) = Rp10.000.000,00

Anuitas (A) = Rp2.000.000,00

Persentase bunga (P) = 12% per tahun atau 1% per bulan

- ✓ Bunga bulan pertama yaitu $B_1 = 10.000.000 \times \% = 100.000$
- ✓ Angsuran pinjaman pokok bulan pertama (a_1) yaitu
 $a_1 = 2.000.000 - 100.000 = 1.900.000$
- ✓ Sisa utang setelah angsuran pertama dibayarkan (M_1) yaitu
 $M_1 = 10.000.000 - 1.900.000 = 8.100.000$

Dengan perhitungan yang sama untuk perhitungan bulan berikutnya, coba kamu lengkapi dan jelaskan dengan panduan Tabel 2.7 berikut.

Tabel 2.7 Mekanisme Pembayaran Anuitas

Bulan	Bunga (Rp)		Angsuran (Rp)		Sisa Utang (Rp)	
Kesatu	B_1	$= 10.000.000 \times 1\%$ $= 100.000$	a_1	$= 2.000.000 - 100.000$ $= 1.900.000$	M_1	$= 10.000.000 - 1.900.000$ $= 8.100.000$
Kedua	B_2	$= 8.100.000 \times 1\%$ $= 81.000$	a_2	$= 2.000.000 - 81.000$ $= 1.919.000$	M_2	$= 8.100.000 - 1.919.000$ $= 6.181.000$
Ketiga	B_3	$= 6.181.000 \times 1\%$ $= \dots$	a_3	$= 2.000.000 - \dots$ $= \dots$	M_3	$= 6.181.000 - \dots$ $= \dots$
Keempat	B_4	$= 4.242.810 \times 1\%$ $= \dots$	a_4	$= 2.000.000 - \dots$ $= \dots$	M_4	$= 4.242.810 - \dots$ $= \dots$
Kelima	B_5	$= 2.285.238,1 \times 1\%$ $= \dots$	a_5	$= 2.000.000 - \dots$ $= \dots$	M_5	$= 2.285.238,1 - 1.977.147,619$ $= 308.090,481$
Keenam	B_6	$= 308.090,481 \times 1\%$ $= 3.080,90481$	a_6	$= \dots$	M_6	$= 0$

Besar anuitas terakhir yaitu

$$a_6 = 308.090,481 + 3.080,90481 = 311.171,3858$$

Perlu diketahui bahwa besar anuitas terakhir dapat berbeda dari sebelumnya karena menyesuaikan besar sisa pinjaman yang ada ditambah bunganya. Dari perhitungan tersebut, dapat disimpulkan bahwa seseorang akan melunasi semua utangnya dalam 6 bulan dengan anuitas terakhir sebesar Rp311.171,3858.



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menggunakan kalkulator *scientific* untuk membantu perhitungan. Kalkulator *scientific* memiliki fitur yang dapat digunakan untuk berbagai aplikasi yang memerlukan perhitungan yang rumit.

Sebelum menggunakan kalkulator, sebaiknya mintalah izin kepada guru.



Pindai

<https://bukupusbuk.id/s/kaldesmos>

Tabel Rencana Pelunasan (*Amortization Schedule*)



Tahukah Kalian

Matematikawan Italia yang memperkenalkan konsep bunga majemuk dan dasar perhitungan nilai waktu uang (*time value of money*) dalam bukunya *Liber Abaci* (1202).

Karyanya menjadi fondasi untuk perhitungan anuitas dan amortisasi.



Gambar 2.4 Leonardo da Pisa

Tabel pelunasan (*amortization schedule*) adalah suatu tabel yang merinci pembayaran cicilan pinjaman anuitas secara periodik, mencakup jumlah pembayaran per periode, suku bunga dan angsuran pokok dalam setiap cicilan, serta sisa utang setelah setiap pembayaran.

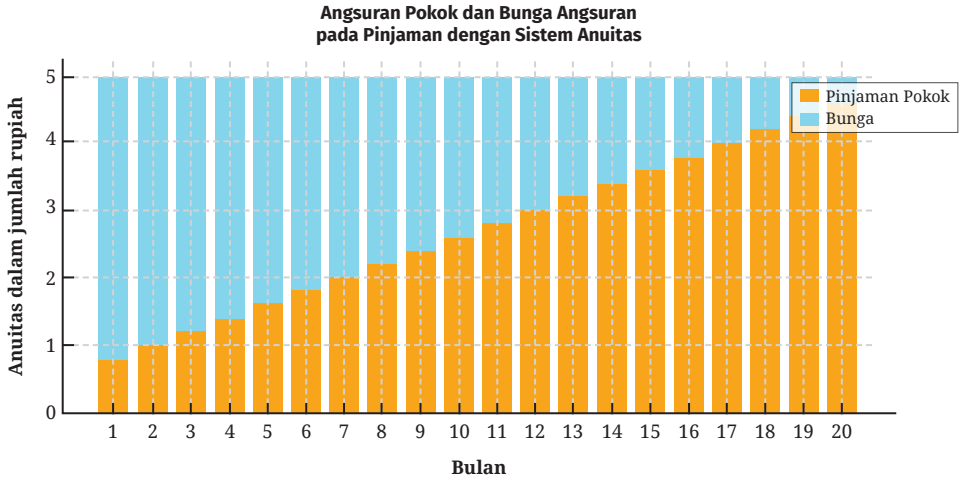
Berdasarkan kasus pada kegiatan **Ayo, Mencoba**, untuk memudahkan perhitungan anuitas dan sisa pinjamannya dapat dibuat tabel rencana pelunasan sebagai berikut.

Tabel 2.8 Rencana Pelunasan

Pinjaman Pokok Bulan Ke- (Rp)		Anuitas (Rp2.000.000,00)		Sisa Pinjaman Akhir Bulan Ke- (Rp)
		Bunga (Rp)	Angsuran	
1	10.000.000	100.000	1.900.000	8.100.000
2	8.100.000	81.000	1.919.000	6.181.000
3	6.181.000	61.810	1.938.190	4.242.810
4	4.242.810	42.428,1	1.957.571,9	2.285.238,1
5	2.285.238,1	22.852,381	1.977.147,619	308.090,481
6	308.090,481	3.080,90481	308.090,481	0

Dari perhitungan yang disajikan dalam Tabel 2.8, dapat dilihat bahwa besar bunga dari bulan ke bulan semakin berkurang, sedangkan besarnya angsuran dari bulan ke bulan semakin besar.

Untuk melihat lebih jelas mengenai perbandingan besar bunga angsuran dan angsuran pokok pada sistem anuitas, perhatikan grafik berikut.



Gambar 2.5 Grafik Angsuran Pokok dan Bunga Angsuran

Grafik pada Gambar 2.5 menunjukkan perbedaan komposisi besar bunga angsuran dan angsuran pokok pada setiap anuitas yang dibayarkan dari waktu ke waktu dalam periode 12 bulan.



Ayo, Berpikir Kreatif

1. Berdasarkan Tabel 2.8 rencana pelunasan serta Gambar 2.5 grafik angsuran pokok dan bunga angsuran, bagaimana jika pelunasan dilakukan lebih cepat dari yang seharusnya? Berikan alasan.
2. Berdasarkan Tabel 2.8 rencana pelunasan serta Gambar 2.5 grafik angsuran pokok dan bunga angsuran, bagaimana jika pelunasan dilakukan tidak tepat waktu? Anggap saja lebih dari 6 bulan.
3. Apakah memungkinkan pelunasan dilakukan dalam 10 bulan? Berapa besar anuitas terakhir yang perlu dibayarkan?

Besar Angsuran Pokok Bulan ke- n pada Anuitas

Kamu telah mempelajari cara menghitung anuitas. Misalkan saat ini kamu meminjam uang di bank dengan bunga dan anuitas tertentu, bagaimana cara menghitung pembayaran pada bulan ketiga, kelima, atau bulan ke- n ? Untuk mengetahui cara menghitungnya, lakukan kegiatan berikut dengan teliti.



Ayo, Berkolaborasi

Buatlah kelompok dengan 2–4 orang anggota yang terdiri atas laki-laki dan perempuan.

1. Analisislah permasalahan berikut dengan cermat.
2. Misal seseorang ingin mengambil pinjaman di bank sebesar M dengan bunga i per bulan. Pinjaman tersebut akan dilunasi dengan anuitas setiap bulan sebesar A . Misal besar angsuran pokok dari anuitas pertama, kedua, dan seterusnya adalah $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Bagaimana rencana pelunasan hutang tersebut?
3. Diskusikan bersama kelompok kalian, kemudian lengkapilah tabel rencana pelunasan berikut.

Tabel 2.9 Rencana Pelunasan

Pinjaman Pokok Bulan Ke-		Anuitas		Sisa Pinjaman Akhir Bulan Ke-
		Bunga (Rp)	Angsuran (Rp)	
1	M	$i \cdot M$	$a_1 = A - i \cdot M$	$M - (A - i \cdot M)$

Pinjaman Pokok Bulan Ke-		Anuitas		Sisa Pinjaman Akhir Bulan Ke-
		Bunga (Rp)	Angsuran (Rp)	
2	$M - (A - i \cdot M)$			
3				
...				
N				

4. Amati hubungan antara besar angsuran dari bulan pertama hingga ketiga, kemudian sederhanakan menjadi bentuk rasional seperti berikut.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\dots}{\dots}$$

5. Apa yang dapat kalian simpulkan mengenai nilai $\frac{a_n}{a_{n-1}}$?
6. Apa yang dapat kalian simpulkan mengenai barisan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$?
7. Carilah jumlah n suku pertama dari barisan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.
8. Sampaikan hasil kerja kelompok kalian di depan kelas.

Berdasarkan hasil diskusi dari kegiatan **Ayo, Berkolaborasi**, dapat disimpulkan bahwa besar angsuran membentuk barisan geometri dengan rasio $r = 1 + i$ dan suku pertama $a_1 = A - i \cdot M$.

Besar angsuran pada bulan ke- n dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$a_n = a_1 \times r^{(n-1)}$$

$$a_n = a_1 \times (1 + i)^{(n-1)}$$

$$a_n = (A - M_i) \times (1 + i)^{(n-1)}$$

Keterangan:

a_n : Besar angsuran

i : Persentase bunga

A : Anuitas

M_i : Pinjaman/Modal awal

n : Periode bulan

Contoh 2.6

Leni meminjam uang di bank sebesar Rp50.000.000,00 dengan bunga 12% per tahun. Leni membayar pinjaman tersebut dengan anuitas sebesar Rp2.000.000,00 per bulan. Berapakah besar angsuran pinjaman yang dibayarkan Leni pada anuitas bulan ke-5?

Alternatif penyelesaian:

$i = 1\%$ per bulan

Besar angsuran pinjaman bulan ke-5 (a_5).

$$a_5 = (A - M_i) \cdot (1 + i)^{(n-1)}$$

$$a_5 = (2.000.000 - 0,01 \times 50.000.000) \cdot (1 + 0,01)^{(5-1)}$$

$$a_5 = (2.000.000 - 500.000) \cdot (1,01)^{(4)}$$

$$a_5 = (1.500.000) \cdot (1,01)^{(4)}$$

$$a_5 = 1.560.906$$



Ayo, Berpikir Kreatif

Kamu telah memahami konsep pinjaman dengan anuitas. Jika terdapat suatu pinjaman sebesar M dengan bunga i dan anuitas A , bagaimana cara menentukan jumlah angsuran yang sudah dibayarkan? Selain itu, bagaimana cara menentukan sisa pinjaman yang ada?

Jumlah Angsuran dan Sisa Pinjaman

Jika terdapat suatu pinjaman sebesar M dengan bunga i dan anuitas A , maka jumlah angsuran yang sudah dibayarkan hingga anuitas ke- n dapat dicari dengan menggunakan rumus jumlah suku ke- n barisan geometri sebagai berikut.

$$S_n = (A - M_i) \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Dengan S_n merupakan total angsuran yang sudah dibayarkan hingga anuitas ke- n .

Contoh 2.7

Juan meminjam uang di bank sebesar Rp50.000.000,00 dengan bunga 12% per tahun. Juan membayar hutang tersebut dengan anuitas sebesar Rp2.000.000,00 per bulan. Berapakah jumlah angsuran pinjaman yang telah dibayarkan Juan hingga pada pembayaran anuitas bulan ke-5? Berapakah sisa pinjaman yang masih perlu dibayar?

Alternatif penyelesaian:

Jumlah angsuran pinjaman hingga bulan ke-5 (S_5).

Bunga 12% per tahun = 1% per bulan

$$S_5 = (2.000.000 - 5000.000 \times 0,01) \frac{(1 + 0,01)^5 - 1}{0,1}$$

$$S_5 = (2.000.000 - 5000.000 \times 0,01) \frac{(1,01)^5 - 1}{0,01}$$

$$S_5 = (1.500.000) \frac{(1,01)^5 - 1}{0,01}$$

$$S_5 = 7.651.507,51$$

Dengan demikian, sisa pinjaman yang masih harus dibayar adalah

$$M - S_5 = 50.000.000 - 7.651.507,51 = \text{Rp}42.348.492,49$$

Menghitung Pinjaman Awal

Berapakah besar pinjaman awal M dari suatu pinjaman di bank yang diangsur dengan sistem anuitas sebesar A dengan bunga i yang dilakukan sebanyak n kali? Tahukah kamu, bahwa perhitungan besar pinjaman awal ini memiliki prosedur yang sama dengan perhitungan nilai sekarang pada anuitas pinjaman? Sama halnya dengan jumlah pinjaman awal yang semakin berkurang seiring dengan periode pembayaran yang berjalan, jumlah uang tabungan awal juga akan semakin berkurang ketika dilakukan pengambilan berkala dari simpanan tersebut.

Dengan demikian, berlaku persamaan berikut.

$$M = \frac{A \times (1 - (1 + i)^{-n})}{i}$$

Contoh 2.8

Seseorang meminjam uang di bank dengan bunga 3% per bulan dan melunasinya dengan sistem anuitas. Jika ia harus membayar kepada pihak bank sebesar Rp5.023.104,00 setiap bulan selama satu tahun, maka berapa jumlah pinjaman awal yang diberikan oleh bank?

Alternatif penyelesaian:

$$M = \frac{A \times (1 - (1 + i)^{-n})}{i}$$

$$M = \frac{5.023.104 \times (1 - (1 + 0,03)^{-12})}{0,03}$$

$$M = \frac{5.023.104 \times (1 - (1,03)^{-12})}{0,03}$$

$$M = 50.000.000$$

Jadi, besar pinjaman awal adalah Rp50.000.000,00.

Menentukan Besar Anuitas

Besar anuitas A untuk pinjaman sebesar M dengan bunga i yang dilakukan dalam n kali pembayaran memenuhi persamaan berikut.

$$A = M \frac{i}{(1 - (1 + i)^{-n})}$$

Untuk lebih memahami cara menentukan anuitas, pelajari contoh soal berikut dengan cermat. Tanyakan kepada gurumu, jika kamu mengalami kesulitan.

Contoh 2.9

Kanaya membeli suatu sepeda listrik dari *dealer* yang menggunakan sistem anuitas pada pembayaran kreditnya. Harga sepeda listrik tersebut adalah Rp12.000.000,00 dengan menggunakan tingkat suku bunga 6% per tahun. Kanaya berencana melunasi kreditnya dengan 8 kali anuitas yang dibayarkan setiap enam bulan. Berapakah besar anuitas yang harus dibayarkan oleh Kanaya?

Alternatif penyelesaian:

$i = 3\%$ per enam bulan

Besar anuitas (A) yaitu

$$A = M \frac{i}{(1 - (1 + i)^{-n})}$$

$$A = 12.000.000 \times \frac{0,03}{(1 - (1 + 0,03)^{-8})}$$

$$A = 12.000.000 \times \frac{0,03}{(1 - (1,03)^{-8})}$$

$$A = 1.709.477$$



Ayo, Menggunakan Teknologi

Google Spreadsheet (atau Google Sheets) adalah aplikasi pengolah data berbasis web yang dikembangkan oleh Google. Ini adalah bagian dari Google Drive dan memungkinkan pengguna untuk membuat, mengedit, dan berkolaborasi dalam spreadsheet secara *online*.

Langkah-Langkah:

1. Buka pranala atau internet pada gawai atau laptop.
2. Ketikkan Google Spreadsheet.
3. Buka *sheets.google.com* atau melalui Google Drive → New → Google Sheets.
4. Lakukanlah kegiatan ini secara berkelompok untuk mendalami penerapan konsep anuitas dalam kehidupan sehari-hari.
5. Bentuklah kelompok yang terdiri atas 2–4 orang anggota. Kalian akan berbagi peran, bekerja samalah dengan baik dan bagilah tugas dengan adil. Kerjakan tugas ini dalam kurun waktu 1 minggu.
6. Diskusikan dengan anggota kelompok kalian untuk membagi peran, yaitu dua orang sebagai pihak bank dan dua orang sebagai pihak nasabah.
7. Pihak nasabah membuat skenario seseorang meminjam uang di bank. Lengkapi keterangan mengenai rincian pendapatan dan alokasi

pendapatan untuk membayar angsuran pinjaman dan kebutuhan yang lain. Buatlah alokasi ini sesuai anjuran yang diberikan badan keuangan. Pastikan besar angsuran tidak melebihi anggaran pendapatan yang telah direncanakan.

8. Pihak bank harus menyediakan tawaran pinjaman yang sesuai dengan skenario pihak nasabah. Setelah itu, buatlah tabel rencana pelunasan untuk pihak nasabah. Gunakan platform Google untuk pengolahan data. Contohnya Google Spreadsheet untuk membantu tugas kalian.
9. Diskusikanlah dengan guru kalian pada jam pelajaran selanjutnya, jika kalian mengalami kesulitan.
10. Buatlah suatu laporan berdasarkan hasil diskusi kelompok kalian dalam menyelesaikan permasalahan tersebut.

Latihan 2.2

1. Ibu Hasti meminjam dana sebesar Rp12.000.000,00 yang diangsur selama 6 bulan (pokok tetap) dengan bunga 8% per tahun. Hitung:
 - a. angsuran pokok per bulan,
 - b. bunga bulan ke-3, dan
 - c. total bunga keseluruhan.

Perhatikan informasi berikut untuk menjawab soal nomor 2–5.

Salah satu produk dari bank untuk memudahkan nasabah mendapatkan rumah adalah dengan menawarkan Kredit Pemilikan Rumah (KPR), di mana nasabah perorangan yang berencana dapat membeli atau merenovasi rumah. Bank menyediakan Kredit Pemilikan Rumah dengan bunga majemuk seperti tabel berikut.

Tabel 2.10 Bunga Majemuk KPR

Kategori	Suku Bunga	Minimum Tenor	Peruntukan
Promo X	3% per tahun	12 tahun	Pembelian properti dari proyek pilihan X.
	3,45% per tahun	15 tahun	

Kategori	Suku Bunga	Minimun Tenor	Peruntukan
Promo Y	4,5% per tahun	15 tahun	Pembelian properti dari proyek pilihan Y.
	6% per tahun	12 tahun	
Promo Z	7,8% per tahun	12 tahun	Pembelian properti dari proyek pilihan Z.

Diketahui bahwa KPR tersebut diperuntukkan untuk proyek berikut.

- Proyek pilihan X memiliki harga sebesar Rp200.000.000,00 dengan pembayaran uang muka sebesar 30%. Sisa tagihan Rp140.000.000,00.
- Proyek pilihan Y memiliki harga sebesar Rp400.000.000,00 dengan pembayaran uang muka sebesar 25%. Sisa tagihan Rp300.000.000,00.
- Proyek pilihan Z memiliki harga sebesar Rp600.000.000,00 dengan pembayaran uang muka sebesar 20%. Sisa tagihan Rp480.000.000,00.

2. Pasangkanlah persentase pada kolom A dengan persentase pada kolom B.

Kolom A		Kolom B
3% per tahun	•	• 0,2875% per bulan
3,45% per tahun	•	• 0,375% per bulan
4,5% per tahun	•	• 0,65% per bulan
6% per tahun	•	• 3 per semester
		• 1,5 per triwulan

3. Tentukanlah pernyataan berikut benar atau salah. Beri tanda ✓ pada kolom yang sesuai.

Pernyataan	Benar	Salah
Uang muka untuk proyek pilihan X adalah Rp60.000.000,00		
Semakin lama tenor yang dipilih, semakin kecil anuitasnya.		
Besar anuitas cicilan promo X lebih kecil dari promo Y.		

Pernyataan	Benar	Salah
Besar anuitas cicilan promo Y lebih besar dari promo Z.		
Anuitas Z yang paling kecil di antara yang lain.		

- Ibu ingin membeli rumah yang ditawarkan pada proyek pilihan Y. Jika ibu mendapatkan penghasilan bulanan sebesar Rp10.000.000,00, manakah KPR yang akan diambil oleh ibu dengan pertimbangan cicilan perbulan tidak melebihi 30% dari penghasilan ibu? Jelaskan alasanmu.
- Seseorang hendak membeli KPR dan mengambil promo X, berapakah selisih total pembayaran dari memilih tenor 12 tahun dengan memilih tenor 15 tahun?

F. Parameter Investasi dan Pinjaman

Suatu parameter dapat mempengaruhi besar kecilnya suatu nilai akhir. Parameter yang pertama yaitu suku bunga. Bagaimanakah pengaruh suku bunga pada nilai akhir? Untuk mengetahuinya, amati dan kerjakan aktivitas berikut.



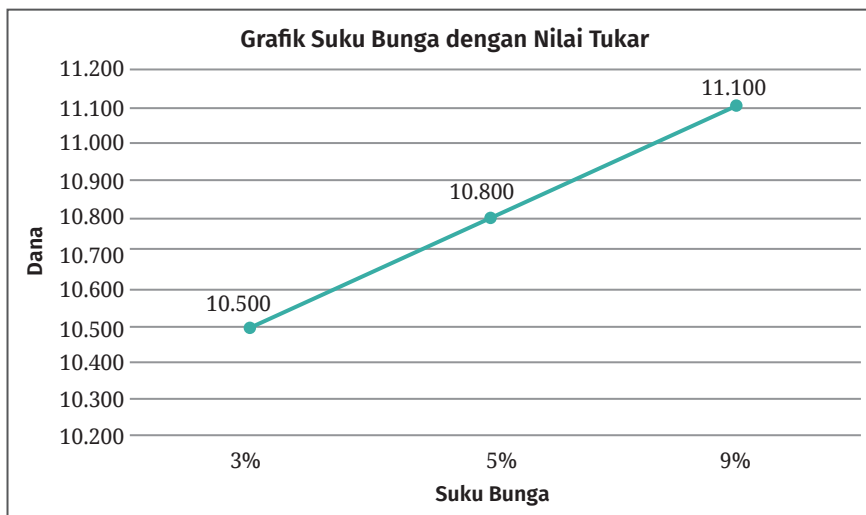
Ayo, Berpikir Kritis

Parameter Suku Bunga

Suatu perusahaan listrik dan elektronik “SURYA LIGHT” memiliki omset yang bervariasi setiap bulannya berkisar antara Rp300.000.000,00 sampai dengan Rp475.000.000,00. Sebagian dari omset tersebut digunakan untuk dana investasi rutin sebesar 10% dari omset minimum. Dana investasi tersebut akan dikelola dalam kurun waktu tertentu 2–4 tahun. Seorang konsultan investasi diminta untuk mengatur dan mengelola dana investasi perusahaan tersebut. Kondisi perekonomian yang tidak stabil mempengaruhi suku bunga per tahunnya sehingga suku bunga bank kisaran 3%–7% per tahun.

1. Jika melihat kondisi suku bunga yang terjadi, menurutmu apa yang harus dilakukan oleh konsultan tersebut agar nilai akhir dana investasi tersebut mendapat *return* atau hasil yang optimal? Jelaskan.
2. Jika konsultan mengambil keputusan untuk menginvestasikan dananya pada kurun waktu 2 tahun, berapa nilai akhir yang didapat dari dana investasi tersebut ketika suku bunga berada pada angka 3%?
3. Dengan investasi dalam kurun waktu yang sama, yaitu 2 tahun, berapa nilai akhir yang didapat dari dana investasi tersebut ketika suku bunga berada pada nilai maksimal (7%)? Bandingkan hasilnya dengan suku bunga 3%.
4. Apa yang dapat disimpulkan tentang pengaruh suku bunga terhadap nilai akhir?

Perhatikan grafik berikut ini.



Gambar 2.6 Grafik Hubungan Suku Bunga dengan Dana

Grafik tersebut merupakan hubungan antara suku bunga dengan nilai akhir.

Jika suku bunga 3%, maka nilai akhir sebesar

Jika suku bunga 6%, maka nilai akhir sebesar

Jika suku bunga 9%, maka nilai akhir sebesar

Dari gambar grafik tersebut, apa yang dapat kamu simpulkan?

Bagaimana jika suku bunga makin besar?

Makin besar suku bunga yang diberikan, maka bagaimana nilai akhirnya?

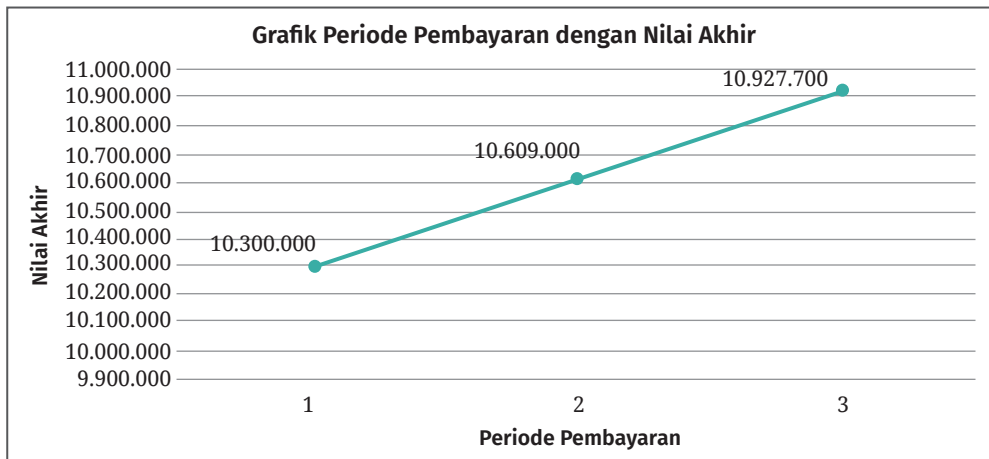
Parameter Periode Pembayaran

Parameter yang kedua adalah periode pembayaran. Bagaimanakah pengaruh periode pembayaran pada nilai akhir? Untuk mengetahuinya, perhatikan kembali informasi sebelumnya.

Suatu perusahaan listrik dan elektronik “SURYA LIGHT” memiliki omset yang bervariasi setiap bulannya berkisar antara Rp300.000.000,00 sampai dengan Rp475.000.000,00. Sebagian dari omset tersebut digunakan untuk dana investasi rutin sebesar 10% dari omset minimum. Dana investasi tersebut akan dikelola dalam kurun waktu tertentu 2–4 tahun. Seorang konsultan investasi diminta untuk mengatur dan mengelola dana investasi perusahaan tersebut. Kondisi perekonomian yang tidak stabil mempengaruhi suku bunga per tahunnya sehingga *rate* bunga bank kisaran 3%–7% per tahun.

1. Jika melihat kurun waktu pengelolaan, menurutmu apa yang harus dilakukan oleh konsultan tersebut agar nilai akhir dana investasi tersebut agar mendapat *return* atau hasil yang optimal? Jelaskan.
2. Jika konsultan mengambil keputusan untuk menginvestasikan dananya pada kurun waktu 2 tahun berapa nilai akhir yang didapat dari dana investasi tersebut ketika suku bunga berada pada angka 5%?
3. Anggap suku bunga yang terjadi adalah 5%. Berapa nilai akhir yang didapat dari dana investasi tersebut, jika konsultan tersebut mempertimbangkan periode waktunya lebih lama, yaitu 3 atau 4 tahun? Apa yang terjadi? Bandingkan hasilnya.
4. Apa yang dapat disimpulkan tentang pengaruh periode terhadap nilai akhir?

Perhatikan grafik berikut ini.



Gambar 2.7 Grafik Hubungan Periode Pembayaran dengan Nilai Akhir

Grafik tersebut merupakan hubungan antara periode pembayaran dengan nilai akhir.

Jika periode pembayaran selama 1 tahun, maka nilai sebesar

Jika periode pembayaran selama 2 tahun, maka nilai sebesar

Jika periode pembayaran selama 3 tahun, maka nilai sebesar

Dari gambar grafik tersebut, apa yang dapat kamu simpulkan?

Bagaimana jika periode pembayaran makin lama?

Makin lama periode pembayaran yang diberikan, maka bagaimana nilai akhirnya?

Latihan 2.3

1. Suatu aplikasi pinjaman *online* memberikan pinjaman sebesar Rp10.000.000,00 dengan suku bunga 2% per tahun. Periode pinjaman selama 24 bulan. Berapakah nilai akhir pengembalian pinjaman tersebut?
2. Suatu Bank XYZ memberikan pinjaman sebesar Rp40.000.000,00 dengan suku bunga 3% per tahun. Diketahui periode pinjaman selama 4 tahun. Hitunglah nilai akhir modal tersebut setiap tahunnya. Buatlah grafik yang menunjukkan kondisi tersebut.
3. Untuk menggalakkan program koperasi berdaya guna, beberapa koperasi akan memberikan pinjaman masing-masing sebesar Rp50.000.000,00 kepada pengurus desa untuk modal pembangunan. Koperasi A

memberikan suku bunga sebesar 3% per tahun selama 6 tahun, sedangkan Koperasi B memberikan suku bunga sebesar 2% per tahun selama 4 tahun. Bandingkan nilai akhir yang akan didapat oleh masing-masing koperasi. Manakah yang lebih menguntungkan?

4. Surya memberikan modal di dua tempat, masing-masing sebesar Rp100.000.000,00. Modal pada tempat pertama memiliki suku bunga 2,5% per tahun dengan periode 5 tahun. Modal pada tempat kedua memiliki suku bunga 3% per tahun dengan periode 4 tahun. Hitunglah nilai akhir modal pada kedua tempat tersebut? Manakah yang lebih menguntungkan.
5. Ayah ingin memberikan modal investasi untuk anaknya sebesar Rp45.000.000,00. Tentukan pernyataan berikut **Benar** atau **Salah**. Beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai.

Pernyataan	Benar	Salah
Nilai akhir yang didapat sebesar Rp54.697.781,25 jika suku bunga 5% per tahun dengan periode selama 4 tahun.		
Nilai akhir yang didapat sebesar Rp59.895.000,00 jika suku bunga 10% per tahun dengan periode selama 3 tahun.		
Nilai akhir yang didapat lebih besar jika suku bunga 5% selama 4 tahun dibanding suku bunga 10% selama 3 tahun.		



Ayo, Berefleksi

Pada bab ini, kamu telah mempelajari materi tentang pinjaman dan investasi. Apakah kamu sudah memahami konsep materi tersebut? Berilah tanda centang (✓) pada materi yang sudah/belum kamu pahami.

No.	Pernyataan	Sudah	Belum
1.	Saya mampu memahami konsep bunga majemuk dan anuitas pada investasi.		

No.	Pernyataan	Sudah	Belum
2.	Saya mampu menghitung besar bunga investasi dengan sistem anuitas.		
3.	Saya mampu menghitung besar tabungan yang dilakukan dengan sistem anuitas.		
4.	Saya mampu memahami konsep bunga majemuk dan anuitas pada pinjaman.		
5.	Saya mampu membuat tabel rencana pelunasan.		
6.	Saya mampu menghitung besar angsuran dan sisa pinjaman.		
7.	Saya mampu menentukan besar anuitas yang dibayarkan.		

Pelajari kembali konsep yang belum kamu pahami. Jika kamu kesulitan dalam memahami konsep yang dimaksud, diskusikan bersama teman dan gurumu.

Uji Kompetensi Bab 2

Perhatikan teks berikut untuk soal nomor 1–3.

Koperasi Sukamaju Desa Sukakaya memiliki program simpanan berjangka sedang yang dapat diambil sesuai jangka waktu yang telah disepakati. Pak Subekti telah menggunakan simpanan berjangka tersebut dengan suku bunga majemuk 2% per triwulan selama 15 bulan. Simpanan tersebut saat ini mencapai Rp44.160.000,00.

N	$(1 + i)$ dengan $i = 2\%$
2	1,0404
3	1,0612
4	1,0824
5	1,104

1. Berdasarkan tabel tersebut, simpanan awalnya sebesar
 - a. Rp20.000.000,00
 - b. Rp25.000.000,00
 - c. Rp30.000.000,00
 - d. Rp36.000.000,00
 - e. Rp40.000.000,00
2. Total bunga yang diterima Pak Subekti adalah ... dari tabungan awal.
 - a. 0,7%
 - b. 2%
 - c. 4%
 - d. 10,4%
 - e. 14%
3. Misalkan tabungan awal Pak Subekti sebesar M . Dengan menggunakan tabel tersebut, cara yang *tidak tepat* untuk menghitung perkiraan nilai tabungan Pak Subekti yang disimpan selama satu setengah tahun adalah
 - a. $(1,104) \times (0,02) \times M$
 - b. $(1,0824) \times (1,0404) \times M$
 - c. $(1,0612) \times M$
 - d. $(1,0404)^3 \times M$
 - e. $(1,02)^6 \times M$

Perhatikan informasi berikut untuk menjawab soal nomor 4–5.

Seseorang meminjam uang sebesar Rp10.000.000,00 selama setengah tahun dengan suku bunga 8% per bulan. Berikut dalam tabel rencana angsuran pinjaman tersebut hingga anuitas ke-3 (dalam satuan Rp100.000,00).

Bulan	Jumlah Pinjaman Awal Bulan	Bunga Pinjaman	Angsuran Pinjaman	Jumlah Pinjaman Akhir Bulan
1	100	8	14	86
2	86	6,88	15,12	70,88
3	70,88	5,7604	16,32	54,5504

4. Besar anuitas pada sistem angsuran tersebut adalah
 - a. Rp2.000.000,00
 - b. Rp2.100.000,00
 - c. Rp2.200.000,00
 - d. Rp2.300.000,00
 - e. Rp2.400.000,00

5. Besarnya bunga angsuran yang dibayarkan pada anuitas ke-5 adalah
- a. Rp278.628,14
 - b. Rp286.462,33
 - c. Rp295.315,46
 - d. Rp301.213,54
 - e. Rp325.594,67

Perhatikan teks berikut untuk menjawab soal nomor 6–8.

Dani adalah seorang mahasiswa tingkat dua akhir yang ingin menabung untuk melanjutkan studi magister di suatu universitas Kota S. Biaya kuliah dan hidup di Kota S diperkirakan sebesar Rp100.000.000,00. Dani berencana untuk mulai menabung setelah pergantian semester sebesar Rp2.000.000,00 setiap bulan ke dalam rekening deposito yang memberikan bunga 9% per tahun.

6. Lama waktu Dani harus menabung agar dapat mencapai targetnya adalah ... bulan.
- a. 41
 - b. 42
 - c. 43
 - d. 44
 - e. 45
7. Nilai masa depan dari tabungannya setelah empat tahun adalah
- a. Rp112.000.000,00
 - b. Rp113.000.000,00
 - c. Rp114.000.000,00
 - d. Rp115.000.000,00
 - e. Rp116.000.000,00
8. Dani tidak jadi menabung dan kemudian meminjam uang di bank untuk melanjutkan studinya. Jika ia mengambil pinjaman dari bank yang menawarkan bunga 0,4% per bulan dan dibayar dengan sistem anuitas sebesar Rp2.064.492,5 setiap bulan selama empat tahun, maka besar uang yang dipinjam oleh Dani adalah
- a. Rp85.000.000,00
 - b. Rp87.000.000,00
 - c. Rp90.000.000,00
 - d. Rp92.000.000,00
 - e. Rp95.000.000,00

Perhatikan teks berikut untuk menjawab pertanyaan no. 9–10.

Bu Tania adalah pemilik usaha toko elektronik yang telah berkembang pesat di kotanya. Usahanya menghasilkan omzet rata-rata sebesar Rp120.000.000,00 per bulan. Ia memiliki 10 orang karyawan dengan gaji rata-rata Rp4.000.000,00, serta pengeluaran rutin lainnya sebesar Rp25.000.000,00 per bulan.

Kini Bu Tania ingin memperluas usahanya ke kota lain dan membutuhkan tambahan modal. Ia mengajukan kredit ke Bank Sentosa, dan mendapat brosur simulasi angsuran kredit seperti tabel berikut.

Pinjaman	Jarak Waktu (dalam Bulan)				
	12	24	36	48	60
Rp10.000.000,00	Rp874.515,00	Rp456.847,00	-	-	-
Rp25.000.000,00	Rp2.186.287,00	Rp1.142.119,00	-	-	-
Rp30.000.000,00	Rp2.623.545,00	Rp1.370.542,00	-	-	-
Rp40.000.000,00	Rp3.498.059,00	Rp1.827.390,00	-	-	-
Rp50.000.000,00	Rp4.372.574,00	Rp2.284.237,00	-	-	-
Rp60.000.000,00	Rp5.247.089,00	Rp2.741.085,00	Rp1.907.984,00	-	-
Rp70.000.000,00	Rp6.121.603,00	Rp3.197.932,00	Rp2.225.981,00	-	-
Rp80.000.000,00	Rp6.996.118,00	Rp3.654.780,00	Rp2.543.978,00	-	-
Rp100.000.000,00	Rp8.745.148,00	Rp4.568.474,00	Rp3.179.973,00	Rp2.488.504,00	-
Rp130.000.000,00	Rp11.368.693,00	Rp5.939.017,00	Rp4.133.965,00	Rp3.235.055,00	Rp2.698.586,00
Rp150.000.000,00	Rp13.117.722,00	Rp6.852.711,00	Rp4.769.959,00	Rp3.732.756,00	Rp3.113.753,00

Bu Tania memutuskan bahwa angsuran maksimal yang dapat ia bayarkan per bulan tidak lebih dari 20% dari total pendapatan bersih per bulan jika mengangsur selama 12 bulan. Namun, jika mengambil angsuran lebih dari 12 bulan (24, 36, 48, atau 60 bulan) tidak lebih dari 10% dari total pendapatan bersih per bulan.

9. Tentukanlah apakah pernyataan-pernyataan berikut Benar atau Salah berdasarkan batas kemampuan angsuran Bu Tania. Beri tanda centang (✓) pada kolom yang sesuai.

Pernyataan	Benar	Salah
Pinjaman Rp100.000.000,00 dengan tenor 12 bulan.		
Pinjaman Rp100.000.000,00 dengan tenor 24 bulan.		
Pinjaman Rp120.000.000,00 dengan tenor 12 bulan.		
Pinjaman Rp130.000.000,00 dengan tenor 24 bulan.		
Pinjaman Rp150.000.000,00 dengan tenor 24 bulan.		

10. Andaikan Bu Tania mengambil pinjaman sebesar Rp100.000.000,00 dengan tenor paling singkat, yaitu 12 bulan, Setelah membuka cabang baru, Bu Tania merekrut 5 orang karyawan tambahan dengan besaran gaji yang sama seperti karyawan sebelumnya (Rp4.000.000,00 per orang). Berapa omzet minimal yang harus diperoleh dari cabang baru agar pendapatan bersih total Bu Tania menjadi dua kali lipat dari sebelumnya?

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, berikan tanggapan atas beberapa pertanyaan berikut ini.

1. Berdasarkan konsep investasi dan pinjaman yang sudah dipelajari, pengalaman apa yang paling relevan dalam kehidupan sehari-harimu? Ceritakan pengalaman tersebut.
2. Bagaimana perasaanmu saat memainkan peran atau melakukan eksperimen berdasarkan materi investasi dan pinjaman?
3. Apa strategi belajar yang dapat kamu gunakan untuk menerapkan materi investasi dan pinjaman?
4. Kendala apa saja yang kamu temui dalam mempelajari serta menerapkan konsep materi investasi dan pinjaman dalam kehidupan sehari-hari?
5. Pada materi investasi dan pinjaman, kegiatan pembelajaran manakah kamu sukai? Apa alasannya?
6. Bagian mana saja yang kamu anggap paling menyenangkan dan mengasyikkan dari pembelajaran materi investasi dan pinjaman? Apa alasannya?

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
REPUBLIK INDONESIA, 2025

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII (Edisi Revisi)

Penulis: Mohammad Tohir, dkk

ISBN: 978-634-00-3118-8 (jil.3 PDF)

Bab 3

Kaidah Pencacahan



Ketika kamu ingin membuka kunci pengaman, mengatur posisi duduk, atau memilih teman dalam kelompok, mengapa cara menghitung jumlah kemungkinan susunannya bisa berbeda-beda? Kapan kamu perlu memperhatikan urutan atau tidak?

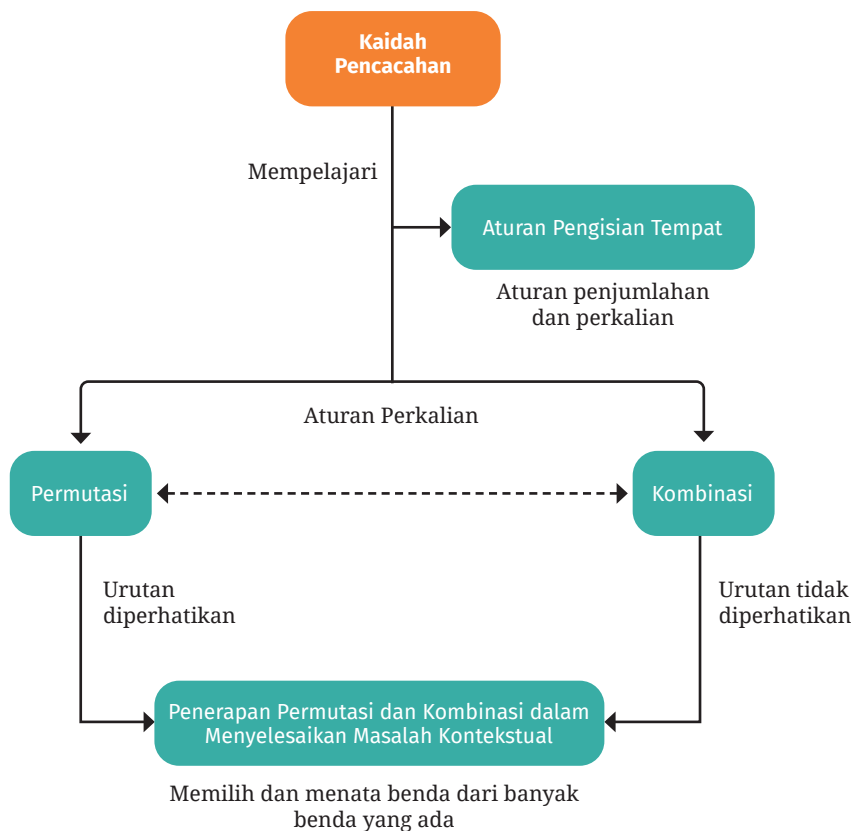
Tujuan Pembelajaran

Setelah kamu mempelajari bab ini, diharapkan dapat mendeskripsikan aturan pengisian tempat, baik aturan penjumlahan maupun perkalian. Selain itu, kamu juga diharapkan dapat melakukan analisis konsep dan bentuk permutasi dan kombinasi serta mengaplikasi konsep permutasi dan kombinasi tersebut dalam menyelesaikan masalah kontekstual.

Kata Kunci

- ▶ Aturan penjumlahan
- ▶ Aturan perkalian
- ▶ Permutasi
- ▶ Kombinasi

Peta Konsep



A. Aturan Pengisian Tempat



Ayo, Bereksplorasi

Arkana adalah seorang duta literasi sekolah, dia memiliki program kerja untuk menata ruang baca di sekolah menjadi menarik dan rapi. Selama ini, ruang baca di perpustakaan sekolah belum tertata dengan rapi. Dia melihat kondisi rak buku di ruang baca seperti pada Gambar 3.1. Terdapat buku yang miring, menumpuk, dan berbeda warna serta ukurannya, sehingga terlihat tidak rapi.



Gambar 3.1 Susunan Buku di Rak

Ketika menjalankan program kerja Arkana akan kembali menata buku-buku ini di rak sesuai jenis, warna, atau ukuran. Terdapat 3 tingkat rak buku yang menentukan jenis buku, yaitu buku pelajaran, novel, dan buku teks. Selanjutnya, ada 4 warna buku yaitu merah, biru, kuning, dan hitam serta ada 2 ukuran buku, A4 dan A5. Coba kamu amati dan perhitungkan, berapa banyak kemungkinan Arkana dapat menyusun buku-buku tersebut berdasarkan kriteria yang ada?



Ayo, Mencoba

Rak perpustakaan sudah ditata dengan rapi. Jika kamu akan membaca satu buku dari beberapa buku yang sudah ditata oleh Arkana berdasarkan kriteria yang ada, berapa banyak pilihan buku yang dapat kamu dapatkan?

Coba analisislah dengan mengisi pengelompokan kriteria buku yang digunakan Arkana.

Tabel 3.1 Pengelompokan Kriteria Buku

Jenis	...	...	novel	
Warna	...	...	...	...
Ukuran	...	...		

1. Perhatikan pengelompokan tersebut, berapa banyak kemungkinan kamu memilih buku jika hanya berfokus pada jenis buku?
2. Bagaimana jika kamu memilih dua kriteria sekaligus, misalnya warna dan ukuran?

Aturan Penjumlahan

Perhatikan kegiatan **Ayo, Mencoba** sebelumnya, jika kamu kelompokkan secara terpisah maka terdapat 3 jenis buku, 4 warna buku, dan 2 ukuran buku. Pengelompokan tersebut jelas berbeda dan saling lepas, sehingga didapatkan banyak pilihan buku yang dibaca adalah

$$3 + 4 + 2 = 9 \text{ cara}$$

Secara matematis,

Misalkan terdapat k kejadian yang saling lepas, dengan ketentuan:

Kejadian ke-1 terjadi dalam n_1 cara berbeda

Kejadian ke-2 terjadi dalam n_2 cara berbeda

⋮

Kejadian ke- k terjadi dalam n_k cara berbeda, maka

banyak cara terjadinya seluruh kejadian tersebut adalah

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k \text{ cara berbeda}$$

Contoh 3.1

Zaydan ingin mengikuti kegiatan FLS3N (Festival Lomba Seni dan Sastra Siswa Nasional) yang terdiri dari 7 bidang lomba dan O2SN (Olimpiade Olahraga Siswa Nasional) yang terdiri dari 9 bidang lomba tingkat kabupaten. Akan tetapi, syarat keikutsertaan lomba adalah mewakili sekolah pada satu bidang lomba untuk seluruh kegiatan. Tentukan banyak cara Zaydan memilih bidang lomba yang sesuai.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

Kegiatan FLS3N : 7 bidang lomba

Kegiatan O2SN : 9 bidang lomba

Karena kasus di atas termasuk aturan penjumlahan, maka banyak cara memilih bidang lomba adalah $7 + 9 = 16$ cara.

Aturan Perkalian

Aturan perkalian terdiri dari tiga cara, sebagai berikut.

1. Aturan Tabel

Humam memiliki 5 kemeja dan 3 celana. Dengan menggunakan aturan tabel, banyaknya pasangan kemeja dan celana yang bisa dipakai Humam ditunjukkan sebagai berikut.

Tabel 3.2 Pasangan Kemeja dan Celana

		Kemeja (K)				
		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
Celana (C)	C_1	C_1K_1	C_1K_2	C_1K_3	C_1K_4	C_1K_5
	C_2	C_2K_1	C_2K_2	C_2K_3	C_2K_4	C_2K_5
	C_3	C_3K_1	C_3K_2	C_3K_3	C_3K_4	C_3K_5

Coba analisis beberapa pertanyaan berikut.

- Jika Humam memiliki 1 kemeja dan 1 celana, berapa banyak pilihan berpakaian yang mungkin?
- Bagaimana jika Humam memiliki 2 kemeja dan 1 celana? Atau 2 kemeja dan 2 celana?
- Jika kamu punya 5 kemeja dan 3 celana seperti Humam, berapa banyak pasangan kemeja dan celana berbeda yang bisa kamu pakai?

Berdasarkan aturan Tabel 3.2 didapat 15 cara memakai kemeja dan celana. Hal tersebut didapat dari $5 \times 3 = 15$, sehingga dapat disimpulkan bahwa jika terdapat m kemeja dan n celana, maka ada $m \times n$ kemungkinan.

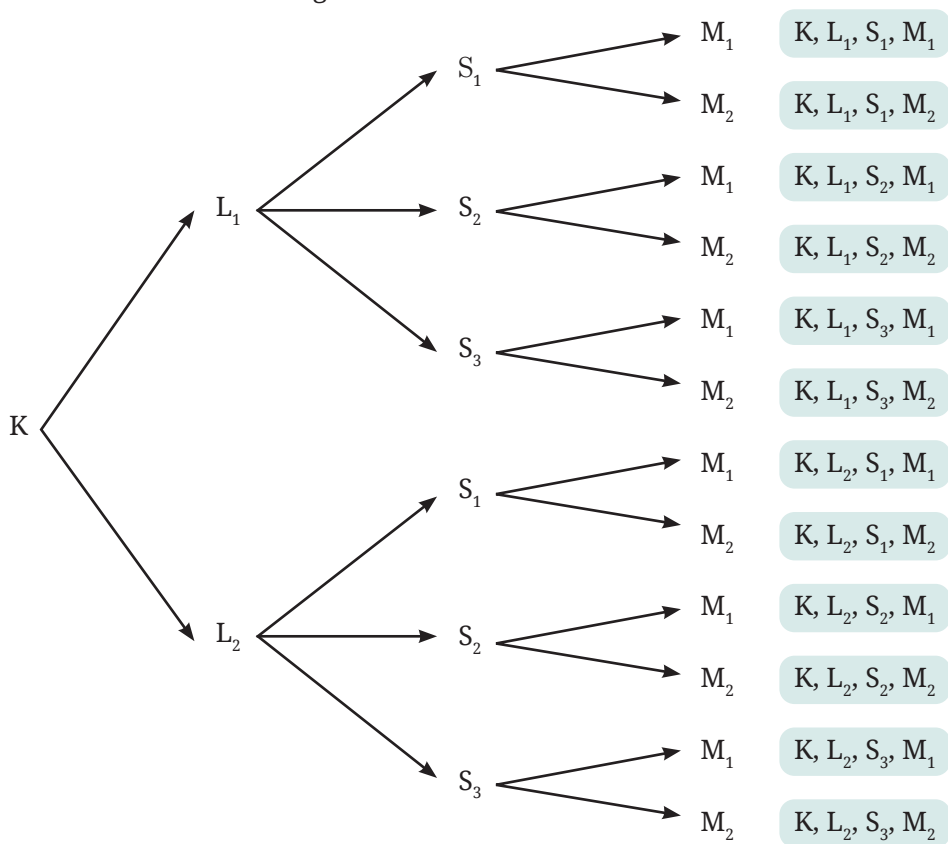
2. Aturan Diagram Cabang

Contoh 3.2

Ahmad akan liburan ke Malang (M), dia berangkat dari kota asalnya yaitu Kudus (K), melalui kabupaten Lamongan (L), kemudian kota Surabaya (S). Jika banyak jalan dari Kudus ke kabupaten Lamongan ada dua jalan. Kemudian dari kabupaten Lamongan ke Kota Surabaya ada tiga jalan. Sedangkan dari Kota Surabaya ke Malang ada dua jalan. Berapa banyak rute perjalanan yang bisa dilalui Ahmad?

Alternatif penyelesaian:

Permasalahan tersebut dapat diketahui dengan mendaftar kemungkinan rute perjalanan yang dapat dilalui oleh Ahmad ketika melakukan perjalanan dari kota Kudus ke kota Malang.



Berdasarkan aturan diagram cabang didapat 12 rute perjalanan yang bisa dilewati dari Kudus (K) ke Malang (M) melalui kabupaten Lamongan (L) dan

Surabaya (S). Rute perjalanan tersebut didapat dengan operasi perkalian yaitu $2 \times 3 \times 2 = 12$.

3. Aturan Perkalian Terurut

Contoh 3.3

Terdapat lima angka yaitu 3, 4, 5, 6, dan 7. Tentukan banyak bilangan tiga angka yang bisa dibuat dari lima angka tersebut.

Alternatif penyelesaian

Apabila angka boleh berulang

5	5	5
---	---	---

$$5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ bilangan}$$

Apabila angka tidak boleh berulang

5	4	3
---	---	---

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ bilangan}$$

Berdasarkan aturan pengisian tempat (aturan perkalian) yang sudah dijelaskan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa aturan tersebut merupakan kejadian yang saling bebas. Seperti yang terjadi pada aturan diagram cabang bahwa rute perjalanan dari Kudus ke Kabupaten Lamongan terdapat p cara, dari kabupaten Lamongan ke Kota Surabaya terdapat q cara, dan dari Kota Surabaya ke Malang terdapat r cara. Banyak rute perjalanan yang dapat dilalui yaitu sebanyak $p \times q \times r$ cara atau bisa ditulis pqr cara.

Secara matematis,

Misalkan terdapat k kejadian yang saling bebas, dengan ketentuan:

Kejadian ke-1 terjadi dalam n_1 cara berbeda

Kejadian ke-2 terjadi dalam n_2 cara berbeda

:

Kejadian ke- k terjadi dalam n_k cara berbeda, maka

banyak cara terjadinya seluruh kejadian tersebut adalah

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k \text{ cara berbeda}$$



Ayo, Berkomunikasi

Choirul merupakan siswa yang memiliki minat tinggi terhadap teknologi, dia ingin membantu usaha toko keluarganya untuk memudahkan mengecek harga barang dan stok barang dengan membuat *barcode*. *Barcode* yang digunakan adalah jenis UPC (*Universal Product Code*) yang terdiri dari 10 atau 12 digit yang lebih sering digunakan untuk toko grosir dan eceran. Berikut contoh *barcode* yang digunakan Choirul.

Pada digit terakhir, yaitu x , y , dan z terdapat tiga angka yang perlu di isi (0 – 9), tiga digit terakhir tersebut menunjukkan kode dan jenis barang. Berapa banyak kemungkinan susunan angka yang dapat menggantikan x , y , dan z ?



Gambar 3.2 Barcode UPC
(*Universal Product Code*)



Petunjuk

1. Perhatikan Gambar 3.2.
2. Pahami perintah yang ada dan analisis kemungkinan yang terjadi.
3. Diskusikan dengan temanmu mengenai permasalahan tersebut.
4. Buat argumentasi dan penjelasan berdasarkan hasil diskusi.
5. Presentasikan hasil diskusi kepada teman yang lain.



Tahukah Kalian

Aturan perkalian dari bilangan asli dapat dituliskan dalam bentuk berikut.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n = n!$$

Notasi $n!$ dibaca n faktorial

Beberapa catatan yang perlu diperhatikan

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \times 2 = 2 \times 1! = 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 3 \times 2! = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4 \times 3! = 12 \times 2! = 24$$

dan seterusnya.

Secara umum dituliskan

$$n! = n(n-1)! \text{ atau } \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$$n! = n(n-1)(n-2)! \text{ atau } \frac{n!}{n(n-1)!} = (n-2)!$$



Ayo, Berpikir Kreatif

Program kerja bidang sosial pada OSIS SMA Abhipraya akan menyiapkan 100 paket kado untuk acara amal sekolah. Setiap paket terdiri dari 1 jenis makanan ringan, 1 jenis alat tulis, dan 1 hiasan kreatif. Misal tersedia 4 jenis makanan ringan: biskuit, coklat, keripik, dan permen, 3 jenis alat tulis: bolpoin warna, pensil, dan *sticky note*, serta 5 jenis hiasan: pita merah, pita emas, stiker lucu, gantungan kunci mini, dan kartu ucapan. Bagaimana kamu bisa membantu OSIS SMA Abhipraya untuk membuat paket dengan minimal 2 tema dari beberapa tema yaitu "warna ceria", "klasik minimalis", "ramah lingkungan" yang konsisten dan menarik? Hitung jumlah paket yang berhasil dibuat dan jelaskan isi paketnya untuk masing-masing tema?

Latihan 3.1

1. Ahmad ingin menggunakan salah satu bolpoin dari 5 bolpoin warna merah, 2 bolpoin warna hitam, dan 4 bolpoin warna biru yang ada di atas meja belajarnya. Tentukan banyak cara Ahmad dapat menggunakan bolpoin tersebut untuk belajar.
2. Achmad dan Budi merupakan calon ketua OSIS di SMA Semangat 45. Sementara itu, Citra, Danita, dan Erik adalah calon wakil ketua. Kemudian terdapat Fitri dan Gina merupakan pesaing untuk sekretaris. Berilah tanda centang (✓) pada pernyataan yang Benar atau Salah.

Pernyataan	Benar	Salah
Jumlah pilihan ketua adalah 2 siswa.		
Setelah memilih ketua, setiap kandidat hanya bisa berpasangan dengan 2 wakil ketua.		
Untuk setiap pasangan ketua dan wakil, terdapat 2 pilihan sekretaris.		
Total pasangan pengurus inti OSIS yang mungkin adalah 12.		
Jika ditambahkan satu kandidat sekretaris baru, total pemilihannya menjadi 18.		

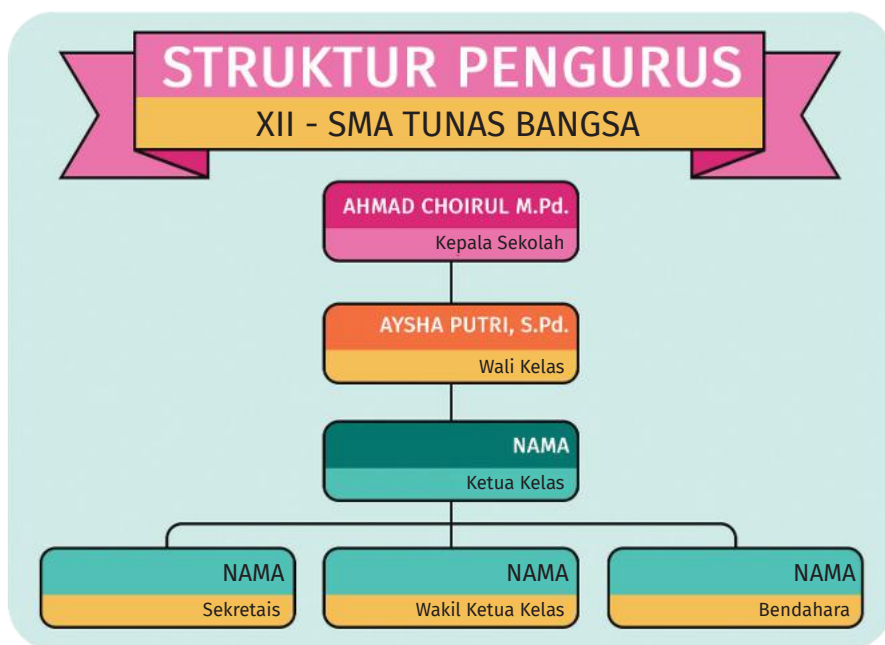
3. Arkan memiliki 5 potong kemeja, 4 celana panjang, dan 3 pasang sepatu berbeda yang digunakan sehari-hari sebagai pakaian bekerja. Jika Arkan membuat setelan yang berbeda saat mengenakannya dalam bekerja, tentukan banyak setelan berbeda yang dibuat.
4. Sepuluh orang siswa memiliki tinggi yang berbeda. Guru olahraga menginginkan mereka berbaris menyamping dengan syarat tidak ada siswa diapit oleh dua siswa lain yang lebih tinggi dari dirinya. Berapa banyaknya cara membuat barisan sesuai ketentuan itu?
5. Klub bulu tangkis Tangkas mempunyai 24 anggota yang terbagi menjadi dua kelompok umur, yaitu kelompok anak dan kelompok remaja. Kelompok anak terdiri atas 15 pemain dengan 8 di antaranya adalah pemain putra. Banyak anggota putri dalam klub bulu tangkis Tangkas ada 10 pemain. Tentukan banyak formasi ganda campuran yang dapat dibentuk oleh klub tersebut dengan masing-masing ketentuan berikut.
 - a. Kedua pemain berasal dari kelompok remaja.
 - b. Satu pemain dari masing-masing kelompok.

B. Permutasi



Ayo, Bereksplorasi

Kelas XII Tunas Bangsa memilih pengurus kelas pada tahun ajaran 2024–2025, pengurus kelasnya terdiri dari ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara. Contoh struktur pengurus kelas tampak disajikan seperti pada Gambar 3.3 berikut.



Gambar 3.3 Struktur Pengurus Kelas

Pada kelas XII-A terdapat 8 siswa yang bersedia menjadi pengurus kelas. Berdasarkan Gambar 3.3 di atas, diketahui bahwa terdapat posisi pengurus yang belum terisi, yaitu ketua kelas, wakil ketua kelas, sekretaris, dan bendahara. Jika yang terpilih menjadi ketua kelas dan wakil ketua kelas adalah Roni dan Andi, maka berapa banyak cara yang mungkin dalam menyusun susunan pengurus tersebut?

Coba perhatikan.

Banyak cara yang mungkin untuk mengisi susunan pengurus yang belum terisi dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Terdapat 8 siswa yang bersedia, dan terdapat 2 siswa yang sudah mengisi susunan pengurus yaitu Roni dan Andi. Sehingga tersisa 6 siswa yang mungkin mengisi 2 susunan pengurus lain yang belum terisi.

Tabel 3.3 Banyak Cara Susunan Pengurus

Susunan Pengurus	Bendahara	Sekretaris
Banyak Cara	6	5

Jadi, banyak cara yang mungkin membuat susunan pengurus adalah $6 \times 5 = 30$ cara.

Secara matematis, perhitungan banyaknya susunan pengurus tersebut dapat dituliskan menggunakan konsep faktorial sebagai berikut.

$$6 \times 5 = \frac{6 \times 5 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(4 \times 3 \times 2 \times 1)} = \frac{6!}{4!} = \frac{6!}{(6 - 2)!}$$

Hasil terakhir perhitungan, dapat dinotasikan sebagai

$$\frac{6!}{6 - 2!} = P_2^6$$

Berdasarkan perhitungan tersebut kalian dapat mengetahui bahwa susunan pengurus kelas yang belum terisi adalah sekretaris dan bendahara. Sekretaris dan bendahara dapat diisi oleh 6 siswa yang bersedia sehingga kondisi tersebut dapat dinyatakan sebagai banyaknya cara menyusun dua pengurus (sekretaris dan bendahara) dari 6 siswa. Secara matematis hal ini dapat disebut sebagai **permutasi 2 dari 6 objek**, yang dinotasikan dengan P_2^6 .

Definisi Permutasi

Misalkan:

r adalah banyak objek yang diinginkan, dan

n adalah banyak keseluruhan objek yang tersedia

Permutasi r objek dari n objek umumnya adalah jumlah konfigurasi potensial dari r objek yang diambil dari n objek, di mana $r \leq n$ tidak ditampilkan secara matematis dan merupakan syarat dalam setiap kemungkinan susunan r objek: Elemen permutasi r yang berbeda dari n adalah:

$${}_nP_r = P_r^n = P(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$$P_r^n = \frac{n!}{n-r!}$$

Keterangan:

P_2^6 dibaca Permutasi r objek dari n objek.

$n!$ dibaca n faktorial

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$



Ayo, Berpikir Kritis

SMA Abhipraya memiliki klub Olimpiade Matematika yang akan mengikuti olimpiade tingkat nasional. Anggota klub terdiri dari dua siswa laki-laki dan tiga siswa perempuan. Sebagai persiapan, mereka diberikan *try out* kemudian disusun peringkat berdasarkan nilai *try out*. Misal diasumsikan bahwa tidak ada dua siswa dengan nilai *try out* yang sama. Setujukah kamu bahwa banyak susunan peringkat berbeda yang mungkin dihasilkan akan sama dengan banyak susunan ketika siswa laki-laki dan perempuan di peringkat sendiri?



Petunjuk

Rumus umum di atas bisa dimodifikasi berdasarkan konteks yang lebih khusus. Berikut beberapa permutasi khusus.

1. Permutasi n Item dari n Objek

Permutasi n item dari n objek yang disediakan dapat ditulis menjadi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P_n^n &= \frac{n!}{(n-n)!} \\ &= \frac{n!}{0!} \\ &= \frac{n!}{1} \\ &= n! \end{aligned}$$

Contoh 3.4

Suatu permainan tradisional Galasin (*gobak sodor*) terdiri dari 6 orang. Tentukan banyak cara menyusun formasi yang terdiri atas 6 orang tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui 6 pemain galasin. Banyak cara menyusun formasi yang terdiri atas 6 orang adalah $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ cara.

Contoh 3.5

Klinik bersalin “Sehat Jaya” memiliki kamar bersalin yang hanya bisa menampung 4 pasien yang akan melahirkan. Pada suatu hari, klinik tersebut kedatangan 4 pasien yang akan melahirkan dalam waktu hampir bersamaan. Berapa banyak cara yang dapat digunakan oleh bidan di klinik tersebut dalam menampung 4 pasien?

Alternatif penyelesaian:

Karena ada 4 pasien yang akan menempati 4 kamar, maka terdapat $4!$ cara atau dapat ditulis sebagai P_4^4 . Dengan demikian, dapat dihitung sebagai berikut.

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$4! = 24$$

atau

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!}$$

$$= \frac{4!}{0!}$$

$$= \frac{4!}{1}$$

$$= 4!$$

$$= 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

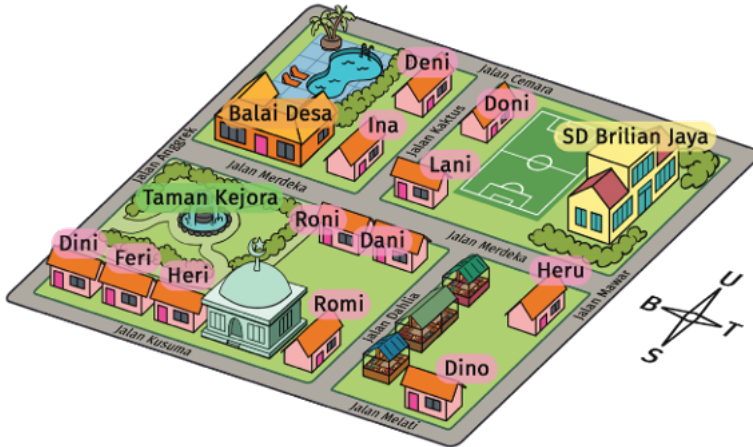
$$= 24$$

Jadi, banyak cara 4 pasien menempati ruang bersalinnya adalah ada 24 cara.



Ayo, Berkomunikasi

Perhatikan Gambar 3.4 berikut.



Gambar 3.4 Denah Perumahan Bunga Indah

Heru dan Dino adalah sahabat karib yang selalu beraktivitas bersama. Suatu hari mereka akan berenang sepulang sekolah. Diskusikan dengan temanmu, berapa banyak kemungkinan Heru dan Dino menuju kolam renang? Presentasikan hasil temuan kalian.



Petunjuk

- Perhatikan rumah Heru dan Dino. Jika mereka melewati Jalan Merdeka untuk menuju kolam renang, berapa jalan yang akan mereka lewati?
- Jika Heru dan Dino berangkat sendiri-sendiri dan sepakat untuk bertemu langsung di kolam renang, jalan apa saja yang akan dilewati mereka?
- Berdasarkan petunjuk sebelumnya, tuliskan dan hitung jalan apa saja yang dilewati Heru dan Dino.

2. Permutasi dengan Objek yang Sama

Misal terdapat susunan objek yang memiliki n unsur, di mana terdapat r_1 unsur yang sama ke-1, r_2 unsur yang sama ke-2 dan seterusnya sampai dengan r_k untuk unsur yang sama ke- k . Banyaknya permutasi pada aturan tersebut dirumuskan sebagai berikut.

$$P_{n_1, r_2, \dots, r_k}^n = P(n, r_1, r_2, \dots, r_k) = {}_n P_{n_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \dots \times r_k!}$$

Keterangan:

n : banyak unsur keseluruhan

r_k : banyak unsur yang sama ke- k

Contoh 3.6

Tentukan banyak susunan sepuluh huruf dari huruf KALIMANTAN.

Alternatif penyelesaian:

Banyaknya susunan 10 huruf yang diambil dari huruf KALIMANTAN, permasalahan ini merupakan permasalahan yang berkaitan dengan permutasi berulang.

Misalkan banyak huruf yang sama adalah sebagai berikut.

$r_1 = \text{munculnya huruf A, maka } r_1 = 3$

$r_2 = \text{munculnya huruf N, maka } r_2 = 2$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} P_{n_1, r_2, \dots, r_k}^n &= \frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \dots \times r_k!} \\ P_{3,2}^{10} &= \frac{10!}{3! \times 2!} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2} \\ &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 2 \\ &= 302.400 \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya susunan huruf dari huruf KALIMANTAN ada 302.400 cara.

Contoh 3.7

Perhatikan kata pertama pada semboyan Indonesia yaitu BHINNEKA. Tentukan banyaknya susunan huruf berbeda yang dapat dibuat dari huruf-huruf pada kata pertama semboyan tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui banyak huruf pada semboyan tersebut ada 8 huruf. Karena termasuk permutasi dengan objek yang sama atau pengulangan, maka terlebih dahulu temukan huruf yang sama. Ditemukan hanya 1 huruf yang sama yaitu N, sehingga $r = 2$.

Sehingga,

$$\begin{aligned}P_{r_1, r_2, \dots, r_k}^n &= \frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \dots \times r_k!} \\P_{2,3,2,3,2}^{18} &= \frac{8!}{2!} \\&= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} \\&= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \\&= 20.160\end{aligned}$$

Jadi, banyaknya susunan berbeda dari huruf pada kata pertama semboyan BHINNEKA ada 20.160 cara.

3. Permutasi Siklis

Jika 3 orang Ahmad (a), Choirul (b), dan Anam (c) duduk berjajar, maka posisi duduk adalah abc , acb , bca , bac , cab , dan cba . Akan tetapi jika orang tersebut duduk mengelilingi meja bundar, maka posisi abc , bca , dan cab adalah sama. Demikian pula posisi acb , cba , dan bac sama. Dengan demikian tiga orang a, b, dan c yang duduk melingkar hanya ada 2 posisi duduk, yaitu abc dan acb . Masalah seperti ini disebut **Permutasi Siklis**.



Gambar 3.5 Posisi duduk melingkar pada meja bundar.

Berdasarkan gambar tiga orang yang duduk di meja bundar, dapat ditunjukkan bahwa

- ▶ Banyak permutasi dari 3 objek yang berbeda adalah $3!$.
- ▶ Ada tiga jenis permutasi siklis yang sama.
- ▶ Banyak susunan 3 objek berbeda dalam permutasi siklis adalah

$$\frac{3!}{3} = \frac{3 \times 2 \times 1}{3} = 2! = (3 - 1)!$$

Secara umum, dapat ditentukan bahwa

- ▶ Banyak permutasi dari n objek yang berbeda adalah $n!$.
- ▶ Ada n jenis permutasi siklis yang sama.
- ▶ Banyak susunan n objek berbeda dalam permutasi siklis adalah

$$\frac{n!}{n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - 1) \times n}{n} = (n - 1)!$$

Jika terdapat n objek disusun secara melingkar (siklis), maka banyak susunan objek dapat ditentukan dengan aturan:

$$P_{siklis}^n = (n - 1)!$$



Ayo, Berpikir Kritis

Secara matematis, jika terdapat permutasi siklis n objek dari r objek yang berbeda. Apa yang dapat kamu temukan dengan menggunakan pemahaman yang sama? Jelaskan pendapatmu.

Contoh 3.8

Terdapat empat orang yang melakukan diskusi dengan duduk secara melingkar. Tentukan banyak susunan yang bisa dibentuk dari empat orang tersebut.

Alternatif penyelesaian:

$$P_4 = (4 - 1)! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ susunan.}$$

Contoh 3.9

Terdapat lima orang laki-laki dan tiga orang perempuan duduk mengelilingi pada suatu meja bundar, tentukan banyaknya cara duduk jika:

- duduk bebas, dan
- tidak ada perempuan yang duduk berdampingan.

Alternatif penyelesaian:

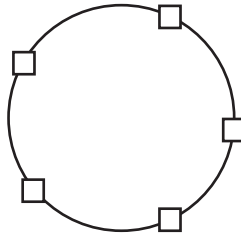
Diketahui 5 orang laki-laki dan 3 orang perempuan duduk melingkar.

- a. Jika mereka duduk bebas, maka banyak cara dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned}P_{siklis}^n &= \frac{n!}{n} = (n-1)! \\P_{siklis}^8 &= (8-1)! \\&= 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\&= 5.040\end{aligned}$$

Jadi, banyak cara duduk apabila duduknya bebas adalah ada sebanyak 5.040 cara.

- b. Setelah semua laki-laki duduk, perempuan mempunyai pilihan sebanyak lima posisi. Gambar di bawah, tanda $\square$ menunjukkan posisi yang sudah ditempati oleh laki-laki.

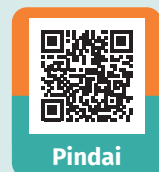


Karena dua perempuan tidak boleh duduk berdampingan, maka perempuan kedua mempunyai empat pilihan dan perempuan ketiga mempunyai tiga pilihan, sehingga $4! \times 5 \times 4 \times 3 = 4! \times 60 = 24 \times 60 = 1.440$. Jadi, banyak cara duduk apabila tidak ada perempuan yang duduk berdampingan adalah sebanyak 1.440 cara.



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu telah belajar tentang cara menghitung banyaknya susunan dari sekumpulan objek yang berbeda menggunakan rumus pada konsep permutasi. Selanjutnya, mari menjelajahi teknologi untuk membantumu memahami konsep permutasi secara lebih visual, cepat, dan menyenangkan. Kunjungi tautan berikut atau pindai kode respons cepat yang tersedia.



Pindai

<https://bukupusbuk.id/s/mtk12permutasi>



Petunjuk

1. Buka pranala internet menggunakan gawai atau laptop.
2. Ketikkan tautan atau pindai kode respons cepat yang disediakan.
3. Supaya lebih mudah memahami, alihkan laman menjadi bahasa Indonesia (opsional).
4. Kerjakan soal yang diberikan.
5. Kamu dapat menggunakan kalkulator yang disediakan di web tersebut.

Latihan 3.2

1. SMK Abisatya memiliki program kegiatan Rumah Terampil yang bertujuan menambah kompetensi siswa untuk menghadapi dunia kerja yang bekerjasama dengan Balai Latihan Kerja. Suatu hari terdapat 12 siswa yang melakukan magang di sebuah perusahaan dengan mengendarai empat mobil. Kapasitas mobil yang dikendarai secara berturut-turut yaitu 3, 3, 2, dan 4 orang. Berapa banyak kemungkinan mereka dapat terangkut dari keempat mobil tersebut?
2. Ada tujuh orang siswa akan membentuk barisan. Tentukan banyaknya susunan barisan yang mungkin terjadi.
3. Cheria adalah petugas perpustakaan di suatu sekolah yang baru saja kedatangan novel tiga jenis. Novel jenis A dan B ada 3 buku, sedangkan novel jenis C ada 2 buku. Novel tersebut akan ditata secara rapi di rak perpustakaan dengan beberapa kriteria. Berikan tanda centang (✓) pada pernyataan yang benar.
 - ☐ Terdapat 560 cara menyusun novel jika ditata secara acak.
 - ☐ Jika novel jenis B ditata berdekatan, maka terdapat 60 cara menyusun novel.

- ☐ Terdapat 500 cara menyusun novel, jika tidak ada novel jenis A berdekatan.
 - ☐ Terdapat 30 cara menyusun novel, jika novel jenis C ditata bersebelahan.
4. Ibukota Nusantara (IKN) akan segera digunakan untuk kegiatan kenegaraan dan aktivitas perkantoran. Pak Ardy selaku pejabat yang ditugaskan untuk membuat administrasi terkait *public transportation*, diminta mengusulkan pelat nomor baru yang digunakan dikawasan IKN dan sekitarnya. Pelat nomor baru yang diajukan Pak Ardy diawali dengan dua huruf KN, empat angka berada di tengah dari 3, 4, 5, dan 6 dapat berulang dan diakhiri tiga huruf berbeda yang terdiri dari huruf A, B, C, dan D seperti **KN 3645 BCA**. Berapa banyak pelat nomor dari *public transportation* yang terbentuk?
5. Suyoko adalah seorang budayawan yang akan mengadakan pameran karya-karya yang sudah pernah dibuat seperti lukisan, patung, dan lain sebagainya. Terdapat 10 lukisan prioritas yang akan diletakkan pada beranda utama galeri pamerannya. Jika *Event Organizer* (EO) sebagai penanggung jawab kegiatan pameran menyarankan kepada Suyoko dengan syarat berikut.
- a. Urutan lukisan tidak diperhitungkan.
 - b. Terdapat 4 lukisan favorit yang selalu berdampingan.

Berdasarkan pernyataan tersebut, tentukan banyak kemungkinan susunan pemasangan lukisan tersebut.

6. Labuan Bajo terkenal dengan keindahan alamnya yang luar biasa, termasuk pantai berpasir putih, air laut yang jernih, dan pulau-pulau kecil yang indah. Kota ini juga merupakan pusat budaya Manggarai dengan berbagai tradisi dan adat istiadat yang unik. Sebagai warga yang kreatif, Putri mencoba menjual suvenir dari beberapa susunan huruf pembentuk kata “LABUAN BAJO”. Berapa banyak susunan huruf sebagai suvenir hasil karya Putri yang bisa dijual?

C. Kombinasi



Ayo, Bereksplorasi

Pak Sauca sebagai Pembina ekstrakurikuler futsal di SMA Abhipraya diminta kepala sekolah mengikuti lomba futsal antarsekolah yang akan diadakan dalam rangka memeriahkan peringatan kemerdekaan HUT RI ke-80. Pak Sauca akan memilih 5 siswa dari ekstrakurikuler futsal sebagai pemain inti untuk mengikuti perlombaan dengan formasi seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 3.6 Bagan Pemain Futsal

Pak Sauca membuat strategi dengan menentukan 2 orang sebagai *flank* dalam melakukan serangan terhadap lawan. Jika nama siswa yang mengikuti futsal adalah Daus, Roni, Agus, Agung, dan Dika. Berapa banyak cara yang dapat digunakan Pak Sauca dalam memilih dua orang sebagai *flank*?

Berdasarkan kasus di atas, susunan *flank* yang mungkin adalah sebagai berikut.

Daus – Roni

Roni – Agus

Agus – Agung

Agung – Dika

Agung – Agus

dan seterusnya

Pada susunan di atas diketahui bahwa terdapat beberapa pasangan yang akan bertindak sebagai *flank*. Coba perhatikan pasangan Agus – Agung dan

Agung – Agus, meskipun tertulis pada pasangan yang berbeda, sesungguhnya pasangan tersebut berisi orang yang sama dalam penunjukkan sebagai *flank*. Kasus di atas disebut sebagai kombinasi.

Definisi Kombinasi

Kombinasi adalah susunan dari suatu objek tertentu yang *tidak memperhatikan* urutan.

Misalnya, kombinasi kata DOA akan sama dengan kombinasi kata ADO karena memiliki huruf-huruf penyusun yang sama yaitu D, O, dan A.

Secara formal dituliskan bahwa **kombinasi k objek dari n objek yang diketahui** merupakan susunan k objek dari n objek yang diketahui (dengan $k \leq n$).

Perhatikan kemungkinan susunan 2 pemain *flank* pada pemain futsal dari 5 orang pemain yang ada. Mengingat konsep permutasi sebelumnya, permutasi 2 objek dari 5 objek yang diketahui dituliskan P_2^5 . Banyak susunannya yang sama dari setiap pasangan 2 objek adalah $2!$ (pada kasus di atas, misalkan susunan pasangan Agus – Agung sebenarnya orangnya sama dengan pasangan Agung – Agus). Banyak kombinasi 2 objek dari 5 objek yang dinotasikan C_2^5 adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} C_2^5 &= \frac{\text{Banyaknya permutasi 2 objek dari 5 objek}}{\text{Banyaknya susunan yang sama}} \\ &= \frac{P_2^5}{2!} \\ &= \frac{5!}{(5-2)! 2!} \end{aligned}$$

Secara umum, pengambilan k objek dari n objek yang berbeda menghasilkan permutasi k objek dari n objek dituliskan P_k^n . Banyaknya susunan yang mungkin dan sama dari pengambilan k objek adalah $k!$, dengan demikian banyaknya kombinasi dari k objek dari n objek berbeda dinotasikan dengan C_k^n adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} C_k^n &= \frac{\text{Banyaknya permutasi } k \text{ objek dari } n \text{ objek}}{\text{Banyaknya susunan yang sama}} \\ &= \frac{P_k^n}{k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! k!} \end{aligned}$$



Petunjuk

Perhatikan bahwa apabila $k > n$, didefinisikan $C_k^n = 0$. Apabila $n = 0$ dan k bilangan bulat positif, maka $C_k^0 = 0$. Hal tersebut akan berakibat bahwa $C_0^0 = 1$. Fakta berikutnya untuk bilangan bulat non-negatif n berlaku $C_0^n = 1$, $C_1^n = n$, dan $C_n^n = 1$.

Contoh 3.10

SMA Abisatya akan memilih 4 dari 10 siswa untuk menjadi perwakilan sekolah dalam lomba debat antarsekolah. Keempat siswa akan mewakili tim sekolah tanpa peran khusus masing-masing. Berapa banyak cara pemilihan dapat dilakukan?

Alternatif penyelesaian:

Perhatikan bahwa terdapat empat siswa yang akan menjadi perwakilan sekolah dalam lomba debat antarsekolah dari total keseluruhan sepuluh siswa. Karena peran 4 siswa tersebut tidak dipengaruhi urutan, maka menggunakan konsep kombinasi dengan $n = 10$ dan $r = 4$. Sehingga dapat diuraikan sebagai berikut.

$$C_4^{10} = \frac{10!}{(10-4)! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!} \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5.040}{24} = 210$$

Jadi, banyak cara memilih siswa tersebut adalah ada 210 cara.

Contoh 3.11

Pengurus OSIS SMA Abhipraya akan mengadakan kegiatan sosialisasi antikekerasan dan *bullying* di sekolah. Berdasarkan anggota OSIS yang aktif kegiatan, terdapat 7 siswa dan 6 siswi, tetapi yang dipilih oleh sekolah sebagai duta antikekerasan dan *bullying* adalah 4 siswa dan 3 siswi. Berapa banyak susunan siswa/i yang menjadi duta?

Alternatif penyelesaian:

Diketahui: $n_1 = 7$ dan $r_1 = 4$

$n_2 = 6$ dan $r_2 = 3$

Banyaknya susunan siswa/i yang terbentuk menjadi duta

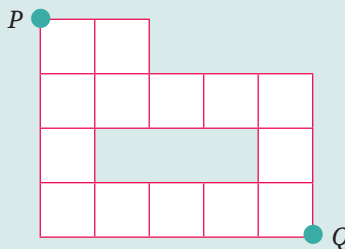
$$C_4^7 \times C_3^6 = \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1} = 35 \times 20 = 700$$

Jadi, banyaknya susunan siswa/i yang menjadi duta antikekerasan dan *bullying* ada 700 susunan.



Ayo, Berpikir Kritis

Rino melakukan perhitungan terkait banyaknya jalan terpendek dari P ke Q adalah 126 cara sesuai dengan gambar berikut.



Banyaknya cara tersebut didapatkan dengan menggunakan rumus berikut.

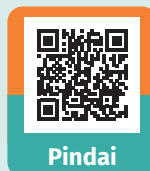
$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

Setujukah kamu dengan pendapat Rino?



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kunjungi tautan berikut untuk memahami dan belajar terkait permutasi dan kombinasi.



Pindai

<https://bukupusbuk.id/s/mtk12geoperkom>



Petunjuk

1. Gunakan tautan <https://tinyurl.com/permutasikombinasi1> untuk mengetahui hasil dari permutasi dan kombinasi.
2. Pada bagian permutasi di tautan tersebut, kalian dapat menentukan hasil dari permutasi dengan menggerakkan titik (*sleder*) atau mengetik nilai n dan nilai r pada kolom yang disediakan.
3. Pada bagian kombinasi di tautan tersebut, kalian dapat menentukan hasil dari kombinasi dengan menggerakkan titik (*sleder*) atau mengetik nilai n dan nilai r pada kolom yang disediakan.

Kombinasi Berulang



Ayo, Bereksplorasi

Ahmad adalah seorang atlet lari yang sedang mempersiapkan kejuaraan lari tingkat Nasional mewakili kota asalnya. Selama mengikuti TC (*training center*), peserta membutuhkan asupan vitamin dan nutrisi yang cukup untuk menjaga kesehatan. Oleh karena itu, panitia menyediakan buah-buahan yang kaya vitamin seperti apel, jeruk, dan pisang dalam sebuah keranjang. Pelatih merekomendasikan kepada Ahmad untuk mengonsumsi empat buah dalam sehari. Jika terdapat empat buah dari setiap jenis buah dalam keranjang yang disediakan, berapa banyak cara Ahmad memilih empat buah yang dapat dikonsumsi?



Gambar 3.7 Ahmad dan Keranjang Buah

Berdasarkan uraian di atas, banyak cara Ahmad memilih buah ditunjukkan seperti kejadian berikut.

Diketahui:

Apel = 4 buah

Jeruk = 4 buah

Pisang = 4 buah

Karena pelatih merekomendasikan setiap hari harus memakan 4 buah, maka

Tabel 3.4 Kemungkinan Pilihan Buah

4 buah apel	3 buah jeruk dan 1 buah apel	2 buah apel dan 2 buah pisang
4 buah jeruk	3 buah jeruk dan 1 buah pisang	2 buah apel, 1 jeruk, 1 pisang
4 buah pisang	3 buah pisang dan 1 buah jeruk	2 buah jeruk dan 2 buah pisang
3 buah apel dan 1 buah jeruk	3 buah pisang dan 1 buah apel	2 buah jeruk, 1 apel, 1 pisang
3 buah apel dan 1 buah pisang	2 buah apel dan 2 buah jeruk	2 buah pisang, 1 apel, 1 jeruk

Tabel 3.4 di atas merupakan cara memilih empat buah yang harus dikonsumsi. Apa yang dapat kamu temukan dan berapa banyak susunan yang mungkin?

Pada persoalan tersebut sebenarnya dapat diketahui bahwa penyelesaiannya adalah sama dengan permutasi 2 objek dari 6 objek dengan 2 jenis objek sama. Sehingga, dapat dituliskan

$$\frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 3 \times 5 = 15 \text{ cara}$$

Definisi Kombinasi Berulang

Misalkan ada r bola berwarna sama dan n kotak.

i. Maksimal satu bola dapat dimasukkan dalam setiap kotak. Banyak cara untuk mendapatkan bola C_r^n .

- ii. Jika lebih dari satu bola yang mungkin ada di setiap kotak (tidak ada batasan jumlah bola), maka jumlah cara mendapatkan bola C_r^{n+r-1} .

$$C_r^{n+r-1} = C_{n-1}^{n+r-1}$$

Hal tersebut biasa disebut Teorema *Stars and Bars* (bintang dan garis).

Teorema *Stars and Bars*

Banyaknya cara memasukkan n benda yang identik ke dalam k kotak yang berbeda adalah

$$C_{k-1}^{n+k-1}$$

Secara ekuivalen, banyaknya solusi bulat nonnegatif untuk persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$$

adalah

$$C_{k-1}^{n+k-1}$$

Contoh 3.12

Terdapat dua puluh apel dan lima belas jeruk untuk dibagikan kepada lima orang anak. Jika lebih dari satu apel atau jeruk atau tidak ada sama sekali yang dapat diperoleh oleh setiap anak, berapakah banyak cara yang dapat dibagi terhadap buah tersebut?

Alternatif penyelesaian:

Soal ini termasuk contoh soal kombinasi berulang, untuk itu perhatikan penyelesaian berikut.

Bentuk umum dari kombinasi pengulangan: C_r^{n+r-1} .

Diketahui: $n = 5$, $r_1 = 20$ (apel), dan $r_2 = 15$ (jeruk)

Membagi 20 apel kepada 5 anak

$$C_{r_1}^{n+r_1-1} = C_{20}^{5+20-1} \text{ cara}$$

Membagi 15 jeruk kepada 5 anak

$$C_{r_2}^{n+r_2-1} = C_{15}^{5+15-1} \text{ cara}$$

Banyak cara pembagian dari kedua buah tersebut adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 C_{20}^{5+20-1} \times C_{15}^{5+15-1} &= C_{20}^{24} \times C_{15}^{19} \\
 &= \frac{24!}{(24-20)20!} \times \frac{19!}{(19-15)15!} \\
 &= \frac{24 \times 23 \times 22 \times 21 \times \cancel{20!}}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \cancel{20!}} \times \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times \cancel{15!}}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \cancel{15!}} \\
 &= 23 \times 22 \times 21 \times 19 \times 6 \times 17 \times 2 \\
 &= 10.626 \times 3.876 \\
 &= 41.186.376
 \end{aligned}$$

Jadi, banyak cara pembagian yang dapat dilakukan ada 41.186.376 cara.



Tahukah Kalian

Kombinasi berulang juga dapat mengatasi masalah dalam perhitungan jumlah jawaban persamaan linear. Kamu dapat menyatakan bahwa $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$ adalah persamaan. Jika x_i adalah bilangan bulat non-negatif, berapa banyak cara penyelesaian yang mungkin? Permasalahan ini sesuai dengan pembagian menjadi r lokasi dari n item identik. Banyaknya solusi adalah C_n^{n+r-1} .

Contoh 3.13

Tentukan banyak solusi bilangan bulat non-negatif dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$.

Alternatif penyelesaian:

Soal ini bisa dikerjakan juga dengan aturan kombinasi berulang seperti berikut.

Diketahui $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, artinya adalah $n = 7$ dan $r = 4$.

$$\begin{aligned}
 C_n^{n+r-1} &= C_7^{7+4-1} \\
 &= C_7^{10} \\
 &= 120
 \end{aligned}$$

Jadi, banyak solusi bilangan bulat non-negatif dari persamaan tersebut ada 120 cara.



Ayo, Berpikir Kritis

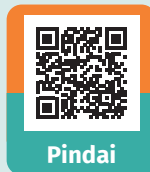
Aysa dibelikan koper oleh ayahnya yang dilengkapi dengan kode kunci pengaman (*password*) dari tiga angka.

1. Setujukah kamu bahwa kode 012 sama dengan 021?
2. Ada berapa banyak kemungkinan kode kunci yang dapat dibuat?
3. Mengapa kode kunci pengaman dengan tiga angka lebih aman dibanding dengan dua angka?



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kunjungi tautan berikut atau pindai kode respons cepat supaya kamu lebih memahami konsep kombinasi secara lebih visual, cepat, dan menyenangkan.



<https://bukupusbuk.id/s/mtk12kombinasi>



Petunjuk

1. Buka pranala internet menggunakan gawai atau laptop.
2. Ketikkan tautan atau pindai kode respons cepat yang disediakan.
3. Supaya lebih mudah memahami, alihkan halaman laman ke dalam bahasa Indonesia (opsional).
4. Kerjakan soal yang diberikan.

Latihan 3.3

1. Tentukan benar atau salah dari beberapa pernyataan berikut dengan memberikan tanda centang (✓) pada tabel yang tersedia.

Pernyataan	Benar	Salah
Memilih 3 siswa dari 10 siswa untuk menjadi pengurus kelas adalah contoh dari penggunaan kombinasi.		
Jika terdapat 5 siswa dan hanya tersedia 3 kursi, maka banyak cara siswa tersebut duduk adalah kombinasi C_3^5 .		
Kombinasi dapat digunakan untuk menghitung banyak cara memilih anggota dari suatu kelompok.		
Terdapat 7 buku, banyak cara memilih 3 buku untuk dibaca ada 35 cara.		

2. Pak Anam sebagai guru pembimbing Olimpiade Matematika akan mengadakan tes terbuka yang bertujuan meningkatkan kreativitas siswanya. Ia meminta 8 siswa untuk membuat masing-masing satu soal matematika sesuai dengan kemampuan dan ketertarikannya. Setelah semua soal terkumpul, Pak Anam akan memilih 5 soal terbaik untuk dibahas lebih lanjut dalam diskusi kelompok. Berapa banyak cara berbeda Pak Anam dapat memilih 5 soal dari 8 soal yang tersedia?
3. Sebagai bentuk penghargaan dan menghormati jasa pendahulu dalam rangka memperingati HUT RI ke-80, SMA Abhipraya mendelegasikan 3 siswa untuk mengikuti lomba cerdas cermat yang diadakan oleh pemerintah kabupaten. Terdapat 6 siswa yang berkeinginan mengikuti lomba tersebut, sehingga guru akan memilih tiga siswa yang berhak mewakili sekolah. Tentukan pernyataan berikut benar atau salah dengan memberikan tanda centang (✓) pada tabel yang tersedia.

Pernyataan	Benar	Salah
Jika guru memilih 3 siswa dari 6 siswa secara acak, maka terdapat 20 cara berbeda.		
Jika guru memilih 3 siswa dari 6 siswa dengan memperhatikan urutan pemilihan, maka terdapat 120 cara berbeda.		
Jika guru memilih 2 siswa dari 6 siswa dan 1 siswa dari 3 siswa yang tersisa, maka terdapat 60 cara berbeda.		

4. AA Bakery merupakan suatu toko kue yang menyediakan 5 jenis kue yaitu coklat, vanilla, stroberi, bluberi, dan pandan. Sebagai bentuk promo kemerdekaan, AA Bakery akan membuat paket kue yang terdiri dari 3 kue berbeda. Berapa banyak kemungkinan paket kue berbeda yang dapat dibuat oleh toko roti tersebut. Berikan tanda centang (✓) pada pernyataan yang benar.
- ☐ Terdapat 10 paket kue berbeda yang dapat dibuat toko tersebut.
- ☐ Karena urutan kue tidak dipertimbangkan maka terdapat 5 paket kue berbeda.
- ☐ Paket kue yang berbeda hanya terdiri oleh 2 jenis kue.
- ☐ Terdapat 10 paket kue berbeda yang dapat dibuat toko tersebut.
5. Yanti adalah desainer pakaian yang akan memadukan pernak-pernik dengan gaya kekinian. Terdapat 5 jenis pernak-pernik berwarna merah, kuning, biru, hijau, dan putih. Jika Yanti hanya memadukan tiga warna pernak-pernik dengan desainnya yang sekarang, berapa banyak jenis pernak-pernik yang bisa dihasilkan?

D. Penerapan Permutasi dan Kombinasi



Tahukah Kalian

Permutasi dan kombinasi bukanlah konsep baru dalam dunia matematika. Sejak ribuan tahun silam, para ilmuwan dari berbagai peradaban telah mengembangkan dan menerapkan konsep ini untuk memecahkan berbagai persoalan nyata. Catatan paling awal datang dari Tiongkok sekitar tahun 1000 SM, ketika konsep permutasi digunakan dalam penyusunan heksagram Yi Jing, sebagai bagian dari sistem ramalan dan filosofi Tiongkok kuno.

Di dunia Arab, seorang matematikawan sekaligus kriptografer bernama Al-Khalil ibn Ahmad al-Farahidi (718–786 M) mengembangkan teknik permutasi dalam bukunya *Kitab al-Muṣannafāt al-Ṣawtiyya* atau *The Book of Cryptographic Messages*. Ia menggunakan permutasi untuk menyusun semua kemungkinan kombinasi huruf Arab dalam analisis linguistik dan penyandian, menjadikannya pelopor awal kriptografi berbasis kombinatorial.

Sementara itu, matematikawan besar Bhaskara II (1114–1185 M) dari India, dalam karya terkenalnya *Lilavati* telah menjelaskan prinsip kombinasi melalui barisan aritmatika dan operasi tempat bilangan. Ia mengajarkan bagaimana hasil perkalian bertingkat dapat membentuk pola variasi bilangan, menunjukkan pemahaman mendalam tentang struktur bilangan dan perhitungannya.

Pada tahun 1677, seorang ahli lonceng asal Inggris bernama Fabian Stedman memperkenalkan konsep permutasi dalam konteks perubahan dering lonceng gereja (*change ringing*). Ia menjelaskan banyak kemungkinan dering lonceng dalam urutan berbeda, menjadikan permutasi relevan dalam seni dan budaya masyarakat Inggris kala itu.

Kontribusi besar berikutnya datang dari matematikawan Italia, Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), yang pada era 1770-an menyadari pentingnya permutasi dalam menyelesaikan masalah persamaan matematika. Hal ini kemudian dikembangkan oleh Évariste Galois (1811–1832), seorang jenius muda asal Prancis yang menciptakan teori Galois, menghubungkan

struktur permutasi dengan teori grup dan penyelesaian persamaan polinomial. Tragisnya, Galois meninggal dalam duel pada usia 20 tahun. Namun, warisannya masih hidup dalam aljabar modern.

Tak kalah menarik, sejarah juga mencatat bahwa teori peluang yang melandasi konsep permutasi dan kombinasi berkembang dari dunia perjudian. Tahun 1654, seorang bangsawan dan penjudi Prancis bernama Chevalier de Méré meminta bantuan Blaise Pascal (1623–1662) untuk memecahkan teka-teki tentang peluang menang dalam permainan dadu. Pascal lalu berdiskusi intens dengan rekannya, Pierre de Fermat (1607–1665), dan dari sinilah lahir dasar-dasar teori probabilitas modern. Kisah mereka bukan hanya menggugah, tetapi juga membuktikan bahwa matematika mampu menjawab persoalan nyata dari kehidupan sehari-hari.



Ayo, Bereksplorasi

Perhatikan Gambar 3.6 sebelumnya. Diketahui bahwa tim futsal SMA Abhipraya sering melakukan pertandingan futsal. Selanjutnya, mereka akan mengikuti perlombaan futsal berikutnya dalam tajuk Bupati Cup. Ada 10 pemain yang tersedia dan hanya 5 pemain yang akan dimainkan dengan posisi kiper, *anchor*, *flank*, dan *pivot*. Jika hanya terdapat 2 pemain yang bisa menjadi kiper, 3 pemain cocok menjadi *anchor*, 4 pemain bisa menjadi *pivot*, dan sisanya diatur untuk posisi *flank*. Berapa banyak susunan berbeda yang mungkin? Apa saja yang kamu temukan?

Tuliskan temuanmu pada tabel berikut ini.

Kiper	Anchor	Flank	Pivot
Jelaskan secara terperinci			

Setelah melakukan aktivitas, kamu akan menemukan banyak cara menemukan susunan pemain yang berbeda sesuai ketentuan. Jika Pak Sauca sebagai Pembina dan juga pelatih futsal berharap menang, dia akan melakukan strategi pola serangan dalam 3 langkah berikut.

- Bola dimulai dari *anchor*.
- Dilanjutkan kepada salah satu *flank*.
- Kemudian dieksekusi oleh *pivot* yang menendang ke gawang.

Apakah tim futsal SMA Abhipraya akan memenangkan pertandingan? Jelaskan alasanmu.



Ayo, Berpikir Kritis

Pada akhir pertandingan ternyata tim futsal SMA Abhipraya mendapatkan skor imbang dengan lawannya. Hal tersebut memunculkan kesempatan adu penalti antara dua tim tersebut. Tim futsal SMA Abhipraya mendapatkan kesempatan 5 tendangan utama, jika Pak Sauca ingin menganalisis banyak kemungkinan hasil tendangan tim yang terdiri dari kombinasi jumlah gol yang berhasil atau tidak. Bantulah Pak Sauca untuk menemukan peluang mencetak gol atau gagal. Diskusikan dengan temanmu, apakah lebih baik menaruh penendang terbaik di awal, tengah, atau terakhir?

Definisi Binomial Newton

Berdasarkan aktivitas eksplorasi, hasil pertandingan yang merupakan peluang mencetak gol atau gagal termasuk salah satu penerapan kombinasi yang disebut Binomial Newton. Penentuan koefisien variabel a dan b pada penjabaran $(a + b)^n$ menggunakan konsep kombinasi. Secara umum dapat dituliskan dalam formula di bawah ini, untuk n bilangan bulat positif berlaku:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n C_r^n a^{n-r} b^r$$

$$(a + b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + C_3^n a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^n b^n$$

Menggunakan aturan segitiga pascal, secara sistematis berlaku

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & C_0^0 & \longrightarrow & (a+b)^0 \\
 & & & & C_0^1 & C_1^1 & \longrightarrow & (a+b)^1 \\
 & & & C_0^2 & C_1^2 & C_2^2 & \longrightarrow & (a+b)^2 \\
 & & C_0^3 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & \longrightarrow & (a+b)^3 \\
 & C_0^4 & C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & C_4^4 & \longrightarrow & (a+b)^4 \\
 C_0^5 & C_1^5 & C_2^5 & C_3^5 & C_4^5 & C_5^5 & \longrightarrow & (a+b)^5 \\
 C_0^6 & C_1^6 & C_2^6 & C_3^6 & C_4^6 & C_5^6 & C_6^6 & \longrightarrow & (a+b)^6 \\
 C_0^7 & C_1^7 & C_2^7 & C_3^7 & C_4^7 & C_5^7 & C_6^7 & C_7^7 & \longrightarrow & (a+b)^7
 \end{array}$$

Sehingga secara umum, berlaku

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n C_r^n a^{n-r} b^r$$

Contoh 3.14

Tentukan koefisien suku yang memuat x^6 dari penjabaran $(2+x)^8$.

Alternatif penyelesaian:

Menggunakan aturan

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n C_r^n a^{n-r} b^r$$

Untuk koefisien x^6 dari $(2+x)^8$ terbentuk dari $(2)^{8-6}(x)^6$, sehingga untuk menentukan koefisien x^6 melalui substitusi nilai $n=8$ dan $r=6$.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n &= \sum_{r=0}^n C_r^n a^{n-r} b^r \\
 (2+x)^6 &= \sum_{r=6}^8 C_6^8 2^{8-6} x^6 \\
 &= \frac{8!}{(8-6)! \times 6!} \times 2^2 \times x^6 \\
 &= \frac{8 \times 7 \times \cancel{6!}}{2 \times \cancel{6!}} \times 2^2 \times x^6 \\
 &= \frac{56}{2} \times 2^2 \times x^6
 \end{aligned}$$

$$= 28 \times 2^2 \times x^6$$

$$= 112x^6$$

Dengan demikian, koefisien dari x^6 adalah 112.

Contoh 3.15

Pada pertandingan futsal antarkelas dalam rangka *classmeeting* pasca pelaksanaan Sumatif Akhir Semester (SAS), tim futsal kelas XII-A harus menjalani adu penalti dengan 5 penendang. Wali kelas XII-A sebagai pelatih ingin menganalisis komposisi susunan penendang sehingga mendapatkan peluang keberhasilan dalam mencetak gol dengan alternatif berikut.

- Banyak susunan penendang di mana tepat 3 penendang berhasil.
- Peluang tepat 4 penendang mencetak gol, jika peluang setiap penendang adalah 0,8.

Bantulah wali kelas XII-A dalam menganalisis adu penalti tersebut.

Alternatif penyelesaian:

- Diketahui $n = 5$ dan $r = 3$. Karena diminta tepat 3 penendang, maka banyak susunannya terletak pada koefisien binomial saat peluang berhasil, yaitu

$$C_r^n = C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Jadi, banyak susunan tepat 3 penendang berhasil ada 10 cara.

- Diketahui

$$n = 5$$

$$r = 4$$

$$p = 0,8$$

$$q = 1 - p = 0,2$$

Sehingga,

$$P(r) = C_r^n p^r q^{n-r}$$

$$P(4) = C_4^5 (0,8)^4 (0,2)^{5-4}$$

$$= 5 \times (0,8)^4 \times (0,2)^1$$

$$= 5 \times 0,4096 \times 0,2$$

$$= 0,4096$$

Dengan demikian, peluang tepat 4 penendang mencetak gol adalah 0,4096.

Latihan 3.4

1. Tim futsal SMA Abhipraya dijadwalkan mengikuti 3 pertandingan awal dalam turnamen dengan sistem poin. Peluang menang untuk setiap pertandingan diperkirakan sebesar 0,6 berdasarkan data latihan dan uji coba. Tentukan peluang tim futsal memenangkan tepat 2 dari 3 pertandingan pertama.
2. SMA Abhiparaya akan mengadakan simulasi kebencanaan. Pada simulasi evakuasi kebencanaan, dari 12 siswa yang diminta merespons, peluang seorang siswa menyelesaikan evakuasi sesuai prosedur adalah 0,7. Berapa peluang tepat 8 siswa mengikuti evakuasi dengan benar?
3. Putri sedang mengikuti try out UTBK di sekolah. Pada saat simulasi, dia akan mengerjakan 5 soal pilihan ganda. Dari pengalaman sebelumnya, peluang dia menjawab benar satu soal adalah 1 banding 2. Jika peluang model jawaban ditulis sebagai $(b + 2s)^5$. Tentukan banyak cara Putri dapat menjawab tepat 2 soal benar.



Ayo, Berefleksi

Berilah tanda centang (✓) pada kotak yang sesuai dengan pemahamanmu setelah mempelajari materi kaidah pencacahan.

No.	Pernyataan	Sudah	Belum
1.	Mengidentifikasi perbedaan antara aturan perkalian dan aturan penjumlahan.		
2.	Menyelesaikan permasalahan sehari-hari terkait aturan pengisian tempat.		
3.	Menjelaskan konsep permutasi.		
4.	Menerapkan konsep permutasi dalam menyelesaikan masalah matematika.		
5.	Menjelaskan konsep kombinasi.		
6.	Menerapkan konsep kombinasi dalam menyelesaikan masalah matematika.		

No.	Pernyataan	Sudah	Belum
7.	Membedakan permasalahan yang berkaitan dengan penerapan konsep permutasi dan kombinasi.		
8.	Membandingkan secara sistematis antara penerapan permutasi dan kombinasi, serta menjelaskan langkah-langkah penyelesaian masalah secara logis dan terperinci.		

Uji Kompetensi Bab 3

- Provider* INDOSELULER akan mengeluarkan produk baru dengan nomor kartu sebagai nomor cantik yang terdiri dari 12 digit. Seorang karyawan ahli IT pada provider tersebut diberi tugas untuk menyusun nomor kartu dengan kode *prefix* (empat nomor awal sebagai identitas INDOSELULER) yaitu 0844 dan empat digit terakhir yang merupakan angka cantik yaitu 2112. Karyawan tersebut hanya diperbolehkan menggunakan angka 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9 untuk menyusun nomor kartu. Banyak nomor kartu yang dapat dibuat dibuat oleh karyawan tersebut ada

 - 5.472 nomor
 - 4.096 nomor
 - 2.401 nomor
 - 1.680 nomor
 - 840 nomor
- Seorang pedagang boneka gemar menata barang dagangannya sehingga nampak tersusun rapi, variatif dan menarik pembeli. Pada satu etalase, dijual barang dengan tipe sama, yaitu 3 boneka warna merah, 4 boneka warna biru, dan 5 boneka warna kuning. Jika pedagang itu menata boneka-boneka tersebut dengan boneka kuning harus berdampingan, banyak cara menata ke-12 boneka ada

 - 280 cara
 - 560 cara
 - 720 cara
 - 2.720 cara
 - 5.440 cara
- Diketahui angka 0, 1, 2, 3, dan 4 akan dibuat bilangan tiga angka yang kurang dari 400 dan tidak ada angka yang berulang. Banyak kemungkinan bilangan berbeda yang dapat dibuat ada

- 120

7. Pengurus OSIS SMA Abhipraya yang terdiri dari 6 siswa akan mengadakan rapat persiapan untuk memperingati HUT RI ke-80. Mereka mengadakan rapat pada kursi bundar dan duduk secara melingkar. Berapa banyak cara 6 siswa duduk secara melingkar jika ketua, sekretaris, dan bendahara harus duduk terpisah?
8. Guru IPA menjelaskan bahwa kenyamanan belajar dipengaruhi oleh kualitas udara, yang tergantung pada suhu (t) dan kelembaban (h). Dalam penelitian kecil di kelas, ditemukan bahwa pengaruh suhu dua kali lebih besar dibanding kelembaban, dan model total pengaruhnya adalah $(2t + h)^5$. Jika suatu waktu suhu memberi pengaruh 3 bagian dan kelembaban 2 bagian. Berapakah total kontribusi kombinasi tersebut?
9. Pada suatu Olimpiade Matematika, peserta diwajibkan mengerjakan 5 soal dari 8 soal yang tersedia. Tentukan banyaknya jenis pilihan soal yang mungkin dikerjakan.
10. Bu Norma sebagai guru Biologi akan melakukan eksperimen kelas, yaitu mengetahui pertumbuhan kecambah. Siswa diminta menanam 6 kecambah di tempat berbeda. Jika peluang tumbuh optimal setiap kecambah adalah 0,65. Pasangkan beberapa pernyataan berikut pada jawaban yang sesuai.

Pernyataan		Jawaban
1) Banyaknya susunan yang mungkin jika tepat 2 kecambah tumbuh optimal.	• •	a. 15
2) Rumus peluang bahwa tepat 3 kecambah tumbuh optimal.	• •	b. C_3^6
3) Nilai peluang tepat 3 kecambah tumbuh optimal, dibulatkan 4 desimal.	• •	c. C_2^6
4) Banyak cara memilih posisi kecambah yang tumbuh optimal saat tepat 3 yang tumbuh optimal.	• •	d. $C_2^6 (0,65)^3 (0,35)^3$
	•	e. 0,2355
	•	f. $6 \times 0,65 \times 0,35$
	•	g. $C_2^6 (0,65)^2 (0,35)^4$

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, berikan tanggapan atas beberapa pertanyaan di bawah ini.

1. Berdasarkan konsep yang sudah dipelajari (aturan penjumlahan, aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi), mana yang paling relevan atau pernah kamu temui dalam kehidupan sehari-hari? Ceritakan satu contoh pengalaman di mana kamu tanpa sadar menggunakan salah satu konsep ini.
2. Bagaimana kamu membedakan kapan urutan itu penting dan kapan tidak saat mempelajari permutasi dan kombinasi? Ceritakan di mana kamu merasa bingung dan bagaimana kamu akhirnya bisa memahami perbedaannya.
3. Apa saja strategi belajar yang kamu gunakan untuk memahami materi kaidah pencacahan? Apakah semua strategi tersebut membantumu untuk belajar secara optimal?
4. Bagaimana pemahamanmu tentang kaidah pencacahan mengubah cara pandangmu dalam mengambil keputusan atau menyusun rencana di masa depan?

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
REPUBLIK INDONESIA, 2025

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII (Edisi Revisi)

Penulis: Mohammad Tohir, dkk

ISBN: 978-634-00-3118-8 (jil.3 PDF)

Bab 4 Peluang



Konsep peluang dapat digunakan untuk menyusun strategi dalam pertandingan sepak bola. Bagaimana cara seorang pelatih menggunakan konsep peluang dalam menyusun strategi untuk melawan tim lawan?

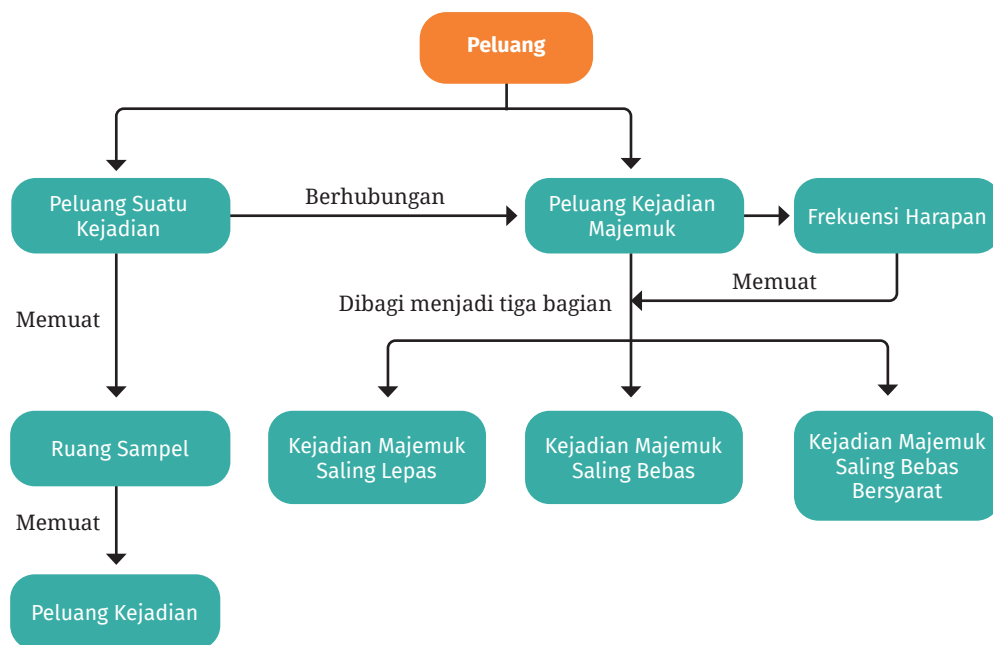
Tujuan Pembelajaran

Setelah kamu mempelajari bab ini, diharapkan dapat menerapkan konsep kombinatorik dalam menentukan peluang kejadian dan kejadian majemuk untuk menganalisis situasi nyata yang melibatkan ketidakpastian secara logis dan menyenangkan.

Kata Kunci

- ▶ Peluang
- ▶ Kejadian
- ▶ Ruang sampel
- ▶ Kejadian majemuk
- ▶ Frekuensi harapan
- ▶ Kejadian saling bebas
- ▶ Kejadian saling lepas
- ▶ Kejadian bersyarat

Peta Konsep



A. Peluang Suatu Kejadian



Ayo, Mengingat Kembali

Coba kamu amati dengan cermat terhadap kedua masalah berikut. Apa yang dapat kamu simpulkan dari materi permutasi dan kombinasi? Jelaskan.

Masalah A

Menjelang pergantian kepengurusan OSIS SMA Semangat 45, dibentuk panitia inti sebanyak 4 orang yang terdiri dari ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara, terdapat 9 orang yang menjadi calon panitia tersebut. Berapa banyak cara memilih panitia inti?

Alternatif penyelesaian:

Misalkan 9 orang tersebut adalah a, b, c, d, e, f, g, h , dan i .

Perhatikan bahwa pada soal ini susunan diperhatikan. Misalkan 4 siswa yang terpilih adalah a, b, c dan d . Dengan intuisi, jelas bahwa jika a sebagai ketua, b sebagai wakil ketua, c sebagai sekretaris, dan d sebagai bendahara, berbeda susunannya jika a sebagai ketua, d sebagai wakil ketua, c sebagai sekretaris, dan b sebagai bendahara.

Penyelesaian masalah A ini dapat dilakukan dengan permutasi 4 objek yang dipilih dari 9 objek.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_4^9 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3.024$$

Jadi, banyak cara memilih panitia inti tersebut ada 3.024 cara.

Masalah B

Menjelang pergantian kepengurusan OSIS SMA Semangat 45, akan dibentuk panitia inti sebanyak 4 orang saja. Calon panitia tersebut ada 9 orang. Berapa banyak cara memilih panitia inti tersebut?

Alternatif penyelesaian:

Perhatikan bahwa pada soal ini susunan tidak diperhatikan dari orang yang dipilih, sehingga dapat menggunakan formula kombinasi, yaitu sebagai berikut.

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

$$C_4^9 = \frac{9!}{(9-4)! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 4!} = 9 \times 2 \times 7 = 126$$

Jadi, banyak cara memilih panitia inti tersebut ada 126 cara.

Setelah kamu mengamati kedua masalah tersebut dan memperoleh kesimpulan dengan pemahaman yang sama, coba perhatikan uraian berikut untuk memperdalam pengetahuanmu tentang peluang suatu kejadian.



Tahukah Kalian



Gambar 4.1 Blaise Pascal
(1623–1662 M)

Blaise Pascal lahir di Prancis pada tanggal 19 Juni 1623. Ia lahir dalam keluarga yang makmur. Ayahnya adalah seorang penasihat kerajaan yang akhirnya menjadi kepala organisasi *The Court of Aids* yang berpusat di Clermont. Pascal tidak pernah bertemu ibunya sejak ia berusia empat tahun. Meskipun ia tidak bersekolah formal, Pascal dikenal karena kecerdasannya. Pada usia 12 tahun, ia mampu membuat mesin hitung untuk membantu ayahnya bekerja. Pekerjaannya berkembang dari membuat bangunan segi enam (heksagram) hingga menemukan prinsip kerja barometer dan mekanisme pengoperasian jam, serta terlibat dalam pembangunan sistem transit bawah tanah Paris.

Blaise Pascal menulis beberapa karya tentang matematika, termasuk teori peluang. Masalah perjudian memotivasi pengembangan teori peluang. Pada tahun 1654, seorang penjudi bernama Chevalier de Mere menyadari adanya masalah dalam permainan. Ketika Chevalier kalah dalam permainan, ia memerintahkan Pascal untuk menyelidiki penyebabnya. Pascal menemukan bahwa sistem permainan tidak akan pernah berpihak pada penjudi. Hal ini menunjukkan bahwa peluang penjudi untuk kalah jauh lebih besar daripada kemungkinannya untuk menang. Ia juga meneliti masalah peluang dengan Pierre de Fermat (1601–1665), matematikawan terkenal lainnya. Antara bulan Juni dan Oktober 1654, Blaise Pascal dan Pierre de Fermat meneliti konsep peluang dalam tujuh surat.

Beberapa pelajaran dapat diambil dari narasi singkat di atas, di antaranya seperti berikut.

1. Terlepas dari tempat kelahiran dan status keluargamu, kamu tidak boleh berhenti bekerja keras untuk selalu belajar.
2. Hal-hal yang dipandang negatif dan bahkan dilarang oleh agama terkadang muncul dalam budayamu. Jika sebagai generasi penerus bangsa berusaha mencari sumbernya, maka tidak ada yang salah. Seperti yang dilakukan Pascal, dengan mengamati dan menganalisis perjudian secara saksama, kamu akan mengerti mengapa perjudian itu buruk.



Ayo, Bereksplorasi

Adi dan Ani pergi ke ruang komputer sekolah bersama-sama saat istirahat untuk menyelesaikan tugas mereka. Setelah berunding, mereka sepakat untuk bergantian menggunakan komputer selama satu jam. Permasalahannya, siapa yang akan menggunakan komputer terlebih dahulu? Menurutmu, bagaimana strateginya agar masalah ini terselesaikan secara tepat? Jelaskan jawabanmu.



Gambar 4.2 Dua Anak Menggunakan Komputer

Adi dan Ani mempertimbangkan cara yang adil agar hasilnya memberikan kemungkinan yang sama. Adi menyarankan untuk mengundi dengan tiga pilihan berikut ini.

1. Mengetos satu koin uang logam (2 sisi) sekali. Jika muncul sisi angka pada pengetosan, maka Adi yang berhak menggunakan komputer lebih dulu. Jika sisi gambar yang muncul, maka Ani yang berhak menggunakan komputer lebih dulu.



Gambar 4.3 Koin Uang Logam

2. Mengambil satu kelereng dari tiga kelereng yang disiapkan dengan mata tertutup. Kelereng yang disiapkan adalah warna merah, kuning, dan hijau. Adi meminta Ani untuk memikirkan satu kelereng warna sebarang. Kemudian Ani mengambil (dengan mata tertutup) satu kelereng dari dalam kantong yang sudah dipersiapkan. Jika kelereng yang diambil Ani sesuai dengan yang dia pikirkan, maka Ani berhak menggunakan komputer lebih dulu.



Gambar 4.4 Tiga Kelereng

3. Menggelindingkan satu dadu bersisi enam. Jika yang muncul di sisi atas adalah bilangan genap, maka Ani berhak menggunakan komputer terlebih dahulu. Jika yang muncul di sisi atas adalah bilangan ganjil, maka Adi berhak menggunakan komputer terlebih dahulu.



Gambar 4.5 Dadu Bilangan



Petunjuk

Suatu cara dikatakan adil dalam masalah Adi dan Ani di atas, jika dengan cara tersebut Adi dan Ani mempunyai kesempatan yang sama untuk mendapatkan giliran menggunakan komputer terlebih dahulu. Untuk mengetahui cara yang digunakan tersebut adil atau tidak, kamu dapat melakukan percobaan dengan mengikuti langkah-langkah berikut.

Alat dan bahan:

- ▶ Satu koin.
- ▶ Tiga kelereng (warna merah, kuning, dan hijau) dalam satu kantong terbungkus rapi.
- ▶ Satu dadu.

Langkah percobaan:

1. Lakukan percobaan dengan langkah berikut.
 - a. Mengetos satu koin minimal sebanyak 50 kali.
 - b. Ambil satu kelereng dari dalam kantong dengan mata tertutup minimal sebanyak 60 kali.
 - c. Gelindingkan dadu minimal sebanyak 120 kali.
2. Amati hasil yang didapatkan pada setiap percobaan.
3. Gunakan tabel seperti berikut agar catatanmu rapi.

Percobaan koin

Tabel 4.1 Hasil Percobaan Koin

Kejadian	Turus	Banyak muncul (f)	Rasio f terhadap $n(P)$
			$\frac{f}{n(P)}$
Sisi Angka			
Sisi Gambar			
Total percobaan ($n(P)$)			

Percobaan kelereng

Tabel 4.2 Hasil Percobaan Kelereng

Kejadian	Turus	Banyak muncul (f)	Rasio f terhadap $n(P)$
			$\frac{f}{n(P)}$
Kelereng merah			

Kejadian	Turus	Banyak muncul (f)	Rasio f terhadap $n(P)$
			$\frac{f}{n(P)}$
Kelereng kuning			
Kelereng hijau			
Total percobaan ($n(P)$)			

Percobaan dadu

Tabel 4.3 Hasil Percobaan Dadu

Kejadian	Turus	Banyak muncul (f)	Rasio f terhadap $n(P)$
			$\frac{f}{n(P)}$
Mata dadu “1”			
Mata dadu “2”			
Mata dadu “3”			
Mata dadu “4”			
Mata dadu “5”			
Mata dadu “6”			
Total percobaan ($n(P)$)			

Pada kolom keempat, rasio (hasil bagi) frekuensi terhadap banyaknya percobaan disebut **peluang empirik**.



Tahukah Kalian

Turus merupakan bentuk penulisan frekuensi dalam tabel dengan menggunakan garis lurus dan garis miring. Misalkan, turus “|||” berarti ada 3 data.



Ayo, Berkolaborasi

Banyak situasi dalam kehidupan sekitar yang menuntut kalian untuk membuat keputusan secara adil. Untuk membuat keputusan yang adil, kalian harus menggunakan cara yang adil juga. Pada kegiatan eksplorasi di atas telah disajikan tiga benda, yaitu koin, kelereng, dan dadu untuk membantu membuat keputusan adil. Masih banyak benda di sekitar kalian yang dapat digunakan untuk membuat keputusan yang adil.

1. Sebutkan contoh benda yang dapat digunakan untuk mengundi suatu kondisi yang memungkinkan terjadi 4 kejadian secara adil.
2. Sebutkan contoh benda yang dapat digunakan untuk mengundi suatu kondisi yang memungkinkan terjadi n kejadian secara adil.
3. Jika m menyatakan banyak percobaan dan n menyatakan banyak kemunculan kejadian A dari percobaan tersebut, maka nyatakan peluang empirik kejadian A.



Tahukah Kalian

Kehadiran suatu eksperimen atau kejadian sebelumnya terkait erat dengan istilah peluang. Kemungkinan terjadinya suatu peristiwa dari percobaan terbatas dapat dipahami sebagai peluang dalam konteks teori peluang. Kisaran nilai nyata, dari 0 hingga 1, digunakan untuk menentukan kemungkinan terjadinya suatu peristiwa sebagai akibat dari percobaan. Peristiwa yang tidak mungkin terjadi atau mempunyai kemungkinan terjadi sangat rendah diberi nilai 0 atau peluangnya nol, sedangkan peristiwa dengan kemungkinan besar terjadi diberi nilai 1 atau peluangnya 1. Suatu kejadian yang peluangnya bernilai 0 disebut dengan kemustahilan, sedangkan kejadian yang peluangnya bernilai 1 disebut dengan kepastian.

1. Ruang Sampel

Definisi Ruang Sampel

Ruang sampel adalah himpunan semua hasil percobaan yang mungkin terjadi. Misalkan S sebagai ruang sampel dan A merupakan sebarang kejadian dalam S , maka $P(A)$ disebut sebagai peluang pada ruang sampel S apabila kisaran nilai peluangnya mulai dari 0 sampai dengan 1 atau dapat ditulis seperti aksioma berikut.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Misalkan A merupakan suatu kejadian pada semesta yang peluangnya dapat dinotasikan oleh $P(A)$. Sementara itu, A^c merupakan kejadian selain dari kejadian A yang ada pada semesta atau dapat disebut juga kejadian komplemen (pelengkap) A . Komplemen dari kejadian A memiliki peluang $P(A^c)$.

$$P(A) + P(A^c) = 1 \text{ atau } P(A^c) = 1 - P(A)$$

2. Peluang Suatu Kejadian

Definisi Peluang Suatu Kejadian

Peluang adalah angka atau besaran yang digunakan untuk mengekspresikan seberapa mungkin sesuatu terjadi. Jika suatu percobaan mempunyai n percobaan secara keseluruhan dan suatu kejadian A terjadi dalam m percobaan, maka peluang terjadinya kejadian A adalah $P(A)$. Secara matematis ditunjukkan sebagai berikut.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Contoh 4.1

Dua koin uang logam dilempar empat kali berturut-turut. Berapakah peluang muncul angka pertama kali pada pelemparan keempat?

Alternatif penyelesaian:

Tentukan semua hasil yang mungkin (ruang sampel) dari pelemparan dua koin uang logam tersebut.



Gambar 4.6 Dua Koin Uang Logam

Ada sebanyak 4 kemungkinan pada pelemparan pertama, semua hasil yang mungkin, yaitu {AA, AG, GA, GG}.

Perhatikan ilustrasi gambar berikut.

	Koin uang logam I		
	A/G	A	G
Koin uang logam II	A	AA	AG
	G	GA	GG

Demikian pula, ada empat kemungkinan untuk lemparan kedua.

Pada upaya pelemparan ketiga, ada empat kemungkinan yang terjadi.

Pada upaya pelemparan keempat, juga ada empat kemungkinan yang terjadi.

Jadi, banyaknya semua hasil yang mungkin dari empat kali pelemparan sebanyak $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$.

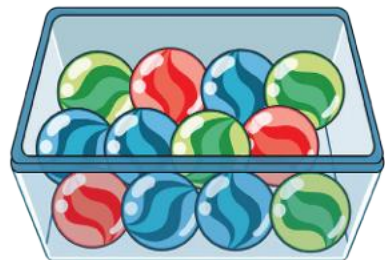
Misalkan N adalah kejadian munculnya angka (A) pertama kali pada pelemparan keempat dan nilai N menyatakan kejadian munculnya, maka $N = \{AA, AG, GA\}$, sehingga $P(N) = \frac{3}{4^4}$.

Jadi, peluang munculnya angka pertama kali pada pelemparan keempat adalah $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4^4}$.

Contoh 4.2

Diberikan 3 kelereng merah, 4 kelereng hijau, dan 5 kelereng biru dalam suatu kotak. Jika diambil tiga kelereng sekaligus dari kotak, berapakah peluang terjadinya kejadian berikut?

- Tiga kelereng yang diambil semuanya berwarna merah.



Gambar 4.7 Kelereng dalam Kotak

- b. Tiga kelereng tersebut semuanya berwarna biru.
- c. Terambil dua kelereng berwarna merah dan satu kelereng berwarna hijau.
- d. Masing-masing satu kelereng berwarna merah, hijau, dan biru.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui jumlah seluruh kelereng yang ada sebanyak 12 butir.

Adapun banyak cara dalam memilih 3 kelereng dari 12 kelereng adalah $C_3^{12} = 220$.

- a. Banyak cara dalam memilih 3 kelereng berwarna merah dari 3 kelereng berwarna merah adalah $C_3^3 = 1$.

Jadi, peluang tiga kelereng yang terambil semuanya merah adalah $\frac{1}{220}$.

- b. Banyak cara dalam memilih 3 kelereng berwarna biru dari 5 kelereng berwarna biru adalah $C_3^5 = 10$.

Jadi, peluang tiga kelereng yang terambil semuanya biru adalah $\frac{10}{220} = \frac{1}{22}$.

- c. Banyak cara dalam memilih 2 kelereng berwarna merah dari 3 kelereng berwarna merah adalah $C_2^3 = 3$.

Banyak cara dalam memilih 1 kelereng berwarna hijau dari 4 kelereng berwarna hijau adalah $C_1^4 = 4$.

Sesuai kaidah perkalian, banyaknya cara memilih 2 kelereng berwarna merah dan 1 kelereng berwarna hijau adalah $3 \times 4 = 12$.

Jadi, peluang yang terambil dua kelereng berwarna merah dan satu kelereng berwarna hijau adalah $\frac{12}{220}$.

- d. Banyak cara dalam memilih 1 kelereng berwarna merah dari 3 kelereng berwarna merah adalah $C_1^3 = 3$.

Banyak cara dalam memilih 1 kelereng berwarna hijau dari 4 kelereng berwarna hijau adalah $C_1^4 = 4$.

Banyak cara dalam memilih 1 kelereng berwarna biru dari 5 kelereng berwarna biru adalah $C_1^5 = 5$.

Dengan demikian, banyak cara dalam memilih 1 kelereng berwarna merah, 1 kelereng berwarna hijau, dan 1 kelereng berwarna biru adalah $3 \times 4 \times 5 = 60$.

Jadi, peluang yang terambil masing-masing satu kelereng berwarna merah, hijau, dan biru adalah $\frac{60}{220}$.



Ayo, Berpikir Kritis

Seorang pembudidaya ikan menambahkan enam puluh ikan ke dalam kolam. Kolam ikan terendam banjir dua hari sebelumnya karena hujan lebat, pembudidaya ikan berupaya memperkirakan jumlah ikan saat ini di kolam dengan menangkap dan menghitungnya. Awalnya, dia menangkap dan menandai hingga tiga puluh ikan sebelum mengembalikannya ke kolam. Dia menangkap empat puluh ikan keesokan harinya, dua di antaranya diberi tanda. Pembudidaya ikan optimistis hasil tangkapannya tidak akan berkurang. Apakah kamu mempunyai sudut pandang yang sama dengan pembudidaya ikan? Jelaskan.

Latihan 4.1

1. Frekuensi gempa bumi menjadi subjek film dokumenter. Topik tentang seberapa mudah gempa bumi diprediksi juga disertakan dalam film tersebut.

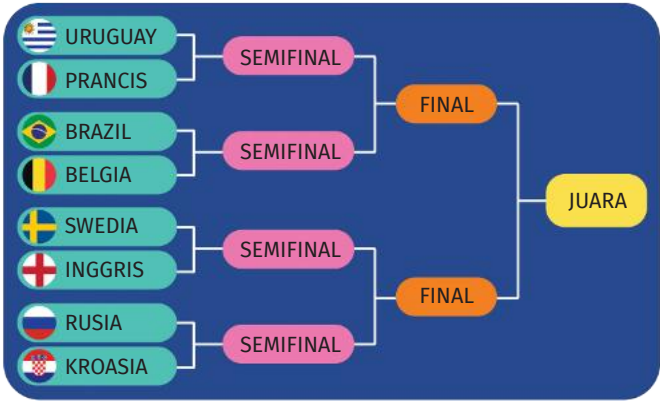
Menurut seorang ahli geologi, kemungkinan terjadinya gempa bumi di Kota A selama 20 tahun ke depan adalah dua per tiga.



Manakah dari pernyataan berikut yang paling akurat sesuai komentar ahli geologi tersebut?

- a. Dikarenakan $\frac{2}{3} \times 20 = 13,3$; maka Kota A akan mengalami gempa bumi dalam 13 atau 14 tahun.
- b. Dikarenakan $\frac{2}{3}$ lebih besar dari $\frac{1}{2}$, maka Kota A kemungkinan akan mengalami gempa bumi dalam 20 tahun ke depan.
- c. Kemungkinan gempa bumi terjadi di Kota A dalam 20 tahun ke depan lebih besar daripada kemungkinan tidak terjadi sama sekali.
- d. Karena tidak ada yang dapat memprediksi kapan gempa bumi akan terjadi, manusia tidak dapat memprediksi apa yang akan terjadi.

2. Mahira mulai mengunduh jadwal pertandingan sepak bola Piala Dunia yang akan datang dimulai dari babak perempat final. Berikut bagan yang diperoleh Mahira.



Selanjutnya, Mahira memberikan jajak pendapat kepada teman-temannya yang dahulu rutin menonton pertandingan sepak bola dan menikmati permainan tersebut. Berdasarkan jajak pendapat yang dilakukan Mahira, ia dapat menghitung peluang masing-masing tim tersebut untuk menang di babak perempat final, seperti yang ditunjukkan pada tabel berikut ini. Namun, semua tim memiliki peluang yang sama untuk menang, yakni 50%, di babak selanjutnya, yang terdiri dari semifinal dan final.

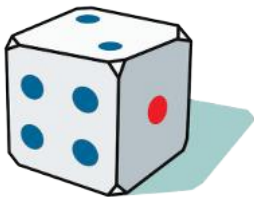
Prakiraan Perempat Final Piala Dunia			
Pertandingan	Asal Negara	Peluang Menang	Total Peluang
1	Uruguay	0,5	1
	Prancis	0,5	
2	Brazil	0,8	1
	Belgia	0,2	
3	Swedia	0,3	1
	Inggris	0,7	
4	Rusia	0,4	1
	Kroasia	0,6	

Berdasarkan bagan pertandingan Piala Dunia dan tabel peluang yang dikumpulkan data oleh Mahira menunjukkan bahwa peluang Inggris untuk memenangkan turnamen tersebut adalah

- A. 0,125 B. 0,175 C. 0,343
D. 0,95 E. 1

3. Jika tiga dadu standar bersisi enam dilempar bersama-sama, berapakah peluang jumlah total dadu pada ketiga pelemparan sama dengan 12?
4. Indonesia berencana untuk mengirimkan delegasi siswa SMA ke Olimpiade Matematika Internasional (IMO) tahun 2026. Ada sepuluh peserta yang mungkin mengikuti, yaitu terdiri dari 6 siswa aljabar, dan 4 siswa ilmu komputer. Delegasi terdiri dari 3 siswa saja yang harus dipilih secara acak dari sepuluh kandidat yang ada. Sebagai anggota panitia seleksi, kamu bertugas mengembangkan berbagai skenario pemilihan delegasi untuk memastikan bahwa tim memiliki bakat yang seimbang dan peluang menang tertinggi. Buatlah setidaknya dua strategi pemilihan delegasi yang menurutmu paling adil dan efektif berdasarkan latar belakang kandidat. Kemudian, hitung kemungkinan salah satu skenario yang kamu usulkan terpilih, misal 2 siswa aljabar dan 1 siswa ilmu komputer. Jelaskan alasan logis dan matematis mengapa kamu yakin strategi tersebut ideal untuk tim IMO.

5.



Pada sisi-sisi sebuah dadu terdapat angka unik, yakni: 1, 2, 4, 5, 6, dan 7.

Berapa peluang terambilnya angka kedua lebih kecil dari angka pertama jika sebuah dadu dilempar sebanyak dua kali?

6. Nomor baru diberikan pada masing-masing dari dua dadu bersisi enam. Nomor pada sisi dadu pertama adalah 1, 1, 2, 3, 3, dan 3, sedangkan nomor pada sisi dadu kedua adalah -1, -1, -1, -2, -2, -3. Tentukan peluang terjadinya pelemparan dadu sebanyak dua kali berturut-turut akan menghasilkan angka positif pada masing-masing sisinya.

7. Kode lima digit yang memiliki ciri-ciri berikut ini dikenali sebagai kode kartu ATM.

- ▶ Digit puluhannya sebesar dua kali lipat dari digit ribumannya.
- ▶ Jika digit satuan dan ratusan ditukar, maka nilai bilangan tersebut tidak berubah.
- ▶ Digit puluhannya dan ribumannya bukan nol.

Hitunglah peluang kemungkinan pemegang kartu dapat langsung menebak kode dengan benar jika dia lupa tetapi mengingat ciri-ciri tersebut.

B. Peluang Kejadian Majemuk



Ayo, Bereksplorasi

Azkiya sedang memainkan permainan di mana dia harus memilih opsi 1 atau opsi 2, serta memutar roda permainan, melempar koin, dan melempar dadu bernomor 1 hingga 6. Agar ia memenangkan pertandingan, semua kondisi yang tercantum pada opsi yang dipilih harus terpenuhi. Opsi mana yang harus dipilih Azkiya?



Gambar 4.8 Permainan Spin

Opsi 1

1. Roda permainan berhenti di S,
2. koin berhenti di sisi gambar, dan
3. angka genap dadu.

Opsi 2

1. Roda permainan berhenti di Z,
2. koin berhenti di sisi angka, dan
3. angka 3 dadu.

Berdasarkan ketentuan pada opsi 1 dan 2, diskusikan tiga pertanyaan berikut dengan terlebih dahulu melakukan percobaan permainan spin.

1. Analisislah opsi manakah yang harus dipilih oleh Azkiya untuk memenangkan pertandingan.
2. Bagaimana kalian dapat menggunakan pengetahuan tentang ruang sampel untuk memilih opsi terbaik?
3. Misalkan opsi 3 ditambahkan ke permainan spin tersebut, dengan syarat roda permainan berhenti di Q, koin berhenti di sisi angka, dan angka ganjil dadu. Haruskah Azkiya mengubah pilihannya ke opsi 3? Jelaskan.



Ayo, Bereksplorasi

Kegiatan ini akan menunjukkan cara mengetahui kemungkinan terjadinya dua kejadian atau lebih. Ada banyak keputusan yang harus diambil dalam hidup. Banyak alternatif yang muncul dari banyaknya pilihan ini, sehingga memberi variasi tersendiri untuk dipilih. Setiap pertandingan sepak bola diawali dengan pelemparan koin oleh wasit untuk menentukan siapa yang mendapatkan bola pertama atau sisi lapangan. Kejadian lainnya, misal terjadi pelemparan dadu di tingkat RT/RW saat perayaan Hari Kemerdekaan 17 Agustus.



Gambar 4.9 Satu Set Dadu dan Koin

Cobalah melakukan latihan melempar koin dan dadu secara bersamaan. Jika percobaan melempar dilakukan secara akurat, Tabel 4.4 berikut mencantumkan hasil potensial dari pelemparan tersebut.

Tabel 4.4 Pelemparan Satu Koin dan Satu Set Dadu

Dadu \ Koin	Dadu						
Koin	 A						

Dadu						
Koin						
 G						

Akibatnya, skenario berikut mungkin terjadi:

$\{(A, 1), (A, 2), (A, 3), (A, 4), (A, 5), (A, 6), (G, 1), (G, 2), (G, 3), (G, 4), (G, 5), (G, 6)\}$.

Tuliskan ekspresi matematika berdasarkan hasil percobaan kalian.

Selanjutnya, diskusikan dua pertanyaan berikut.

- Paling sedikit, berapa banyak kejadian dalam percobaan yang membentuk kejadian majemuk? Hal ini merupakan pertanyaan yang diajukan Mahira kepada Azkiya tentang kemungkinan terjadi pada suatu percobaan. Bantu Azkiya menanggapi pertanyaan ini.
- Menyusul tanggapan Azkiya kepada Mahira, Azkiya mengajukan pertanyaan lain kepada Mahira. Bagaimana hubungan khusus yang memungkinkan terjadinya kejadian majemuk? Cobalah untuk membantu Mahira dalam menjawab pertanyaan ini juga.

1. Kejadian Majemuk

Definisi Kejadian Majemuk

Kejadian majemuk adalah suatu kejadian yang dapat dijelaskan dalam bentuk gabungan, irisan, atau pelengkap kejadian. Pendekatan antarhimpunan akan digunakan untuk menghitung kemungkinan suatu kejadian gabungan. Hubungan antara dua himpunan dapat dinyatakan sebagai perpotongan himpunan tersebut.

Contoh 4.3

Satu keping koin dan satu set dadu dilantunkan secara bersamaan. Perkirakan kemungkinan munculnya lebih dari dua pada dadu, jika diketahui bahwa angka akan muncul pada koin.



Gambar 4.10 Koin dan Dadu

Alternatif penyelesaian:

Misalkan:

K = sekeping koin, sehingga $K = \{A, G\}$, dan $n(S_K) = 2$.

L = sebuah dadu, sehingga $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dan $n(S_L) = 6$.

Diketahui muncul angka pada koin, $n(K) = 1$,

sehingga peluangnya $P(K) = \frac{n(K)}{n(S_K)} = \frac{1}{2}$.

Ditanyakan peluang munculnya mata dadu lebih dari dua, yaitu angka-angka $\{3, 4, 5, 6\}$ $n(L) = 4$,

sehingga peluangnya $P(L) = \frac{n(L)}{n(S_L)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Jadi, peluang munculnya angka mata dadu lebih dari dua adalah $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

2. Frekuensi Harapan dari Kejadian Majemuk

Definisi Frekuensi Harapan dari Kejadian Majemuk

Frekuensi harapan dari kejadian majemuk adalah harapan banyaknya kejadian majemuk yang dapat terjadi dari sejumlah percobaan yang dilakukan.

Jika K_j adalah suatu kejadian majemuk A dan B , sehingga $P(K_j)$ adalah peluang terjadinya A dan B , maka besarnya frekuensi harapan (F_h) kejadian A dan B dalam n kali percobaan dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$F_h = P(K_j) \times n$$

Contoh 4.4

Dua buah dadu dilempar sebanyak 360 kali. Berapa frekuensi harapan muncul mata dadu 3 untuk dadu pertama dan mata dadu 5 untuk dadu kedua?

Alternatif penyelesaian:

Misalkan banyak ruang sampel

$$n(S) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} = 36.$$

Banyak muncul mata dadu 3 untuk dadu pertama,

$$n(A) = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\} = 6.$$

Banyak muncul mata dadu 5 untuk dadu kedua,

$$n(B) = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5)\} = 6.$$

Dengan demikian, peluangnya adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(M) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\text{Sehingga, } F_h = P(K_j) \times n = \frac{1}{36} \times 360 = 10.$$

Jadi, frekuensi harapan muncul mata dadu 3 untuk dadu pertama dan mata dadu 5 untuk dadu kedua adalah 10.

3. Peluang Kejadian Majemuk**Definisi Peluang Kejadian Majemuk**

Peluang terjadinya dua kejadian atau lebih secara bersamaan disebut peluang kejadian majemuk. Notasi dari "dan" adalah $\cap$ dan "atau" adalah $\cup$, keduanya masing-masing menunjukkan kejadian majemuk. Rumus umum untuk kasus dua kejadian A dan B adalah sebagai berikut.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Contoh 4.5

Jumlah siswa Sekolah Menengah Atas kelas XII adalah 34. Terdapat 23 siswa yang menyukai Matematika, ada 19 siswa yang menyukai Fisika, dan 12 siswa yang menyukai kedua disiplin ilmu tersebut. Bagaimana cara memastikan kemungkinan bahwa seorang siswa yang dipilih secara acak akan menyukai Matematika atau Fisika?

Alternatif penyelesaian:

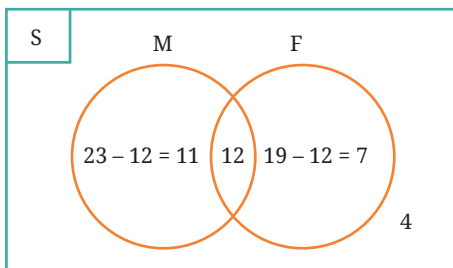
Misalkan banyak ruang sample, $n(S) = 34$.

Siswa yang menyukai Matematika, $n(M) = 23$.

Siswa yang menyukai Fisika, $n(F) = 19$.

Siswa yang menyukai Matematika dan Fisika, $n(M \cap F) = 12$.

Perhatikan diagram venn berikut.



Peluang terpilihnya siswa yang menyukai Matematika atau Fisika dapat diuraikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(M \cup F) &= P(M) + P(F) - P(M \cap F) \\ &= \frac{23}{34} + \frac{19}{34} - \frac{12}{34} \\ &= \frac{23 + 19 - 12}{34} \\ &= \frac{30}{34} \\ &= \frac{15}{17} \end{aligned}$$



Petunjuk

Pertimbangkan untuk mencatat hasil pencarian yang kamu temukan.

- a. Apa yang kamu dapatkan pada bagian pendahuluan tentang peluang kejadian majemuk?
- b. Apa yang dimaksud dengan kejadian yang pasti atau tidak mungkin terjadi? Bagaimana kemungkinan peluangnya? Uraikan jawabanmu.
- c. Apa yang kamu ketahui tentang peluang kejadian gabungan?
- d. Tunjukkan banyaknya jenis kejadian majemuk berbeda dan berikan simbolnya masing-masing.

4. Peluang Kejadian Majemuk Saling Lepas

Jacques sangat berharap bahwa salah satu temannya menelepon untuk membicarakan latihan *softball* atau *band*. Mungkinkah panggilan itu membahas keduanya?

Dalam situasi seperti itu, lebih dari satu kejadian dapat terjadi selama satu kali percobaan. Kamu perlu membandingkan kejadian-kejadian tersebut berdasarkan hasil yang menyusunnya. Berapa peluang terjadinya minimal satu kejadian? Apakah situasinya "salah satu," atau kedua kejadian dapat terjadi?



Gambar 4.11 Telepon Berdering



Ayo, Bereksplorasi

Marina, yang memukul untuk Cintia, menghadapi Anton, yang melempar untuk *Power Trippers*. Anton menggunakan tiga lemparan: *fastball*, *curveball*, dan *slider*. Marina merasa ia memiliki peluang bagus untuk melakukan pukulan dasar, atau lebih baik, jika Anton melempar *fastball* atau *slider*. Hitungannya adalah dua *strike* dan tiga bola. Dalam situasi hitungan penuh seperti itu, Anton melempar *curveball* sepertiga dari waktu, *slider* setengah lebih sering, dan *fastball* di sisa waktu.



Gambar 4.12 Pelemparan Fastball

Lakukan percobaan permainan *fastball* untuk menjawab pertanyaan berikut dengan benar.

- a. Tentukan peluang Anton melempar
 - 1) *curveball*
 - 2) *slider*
 - 3) *fastball*
- b. Berapa peluang Marina akan mendapatkan lemparan yang tidak diinginkannya? Bagaimana kamu dapat menggunakan informasi ini untuk menentukan peluang Marina akan mendapatkan lemparan yang disukainya.
- c. Tunjukkan metode lain untuk menentukan peluang ini. Jelaskan metode tersebut.
- d. Apakah jawabanmu untuk pertanyaan 2 dan 3 menunjukkan peluang kejadian yang tidak dapat terjadi secara bersamaan?

Kejadian-kejadian yang mungkin terjadi dalam penyelidikan ini dapat dikatakan kejadian majemuk saling lepas (saling eksklusif), karena tidak dapat terjadi pada saat yang bersamaan. Misalnya, lemparan tidak dapat berupa bola cepat dan *slider*. Dalam soal khusus ini, hanya memperhatikan peluang salah satu dari dua kejadian yang menguntungkan. Kamu dapat menggunakan notasi $P(A \cup B)$ untuk menyatakan peluang terjadinya A atau B.

Definisi Kejadian Majemuk Saling Lepas

Kejadian majemuk saling lepas adalah dua kejadian yang tidak dapat terjadi secara bersamaan. Misalkan kejadian A dan B tidak dapat terjadi secara bersamaan atau tidak mempunyai hubungan satu sama lain, maka kejadian A dan B disebut sebagai kejadian majemuk saling lepas; atau dengan kata lain kejadian A dan B tidak memiliki irisan. Rumus yang didapat adalah seperti berikut.

$$P(A \cap B) = 0$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Contoh 4.6

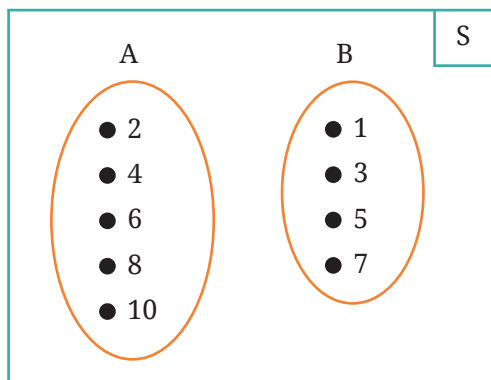
Raka membuat sepuluh kartu bernomor dan memasukkannya ke dalam saku. Raka mengeluarkan kartu secara acak dari saku. Diketahui kartu berbilangan genap melambangkan kejadian pertama (A) dan kartu berbilangan prima ganjil melambangkan kejadian kedua (B).

- Bagaimana cara menentukan apakah kejadian A dan B tidak dapat terjadi bersamaan?
- Berapa besar peluang kejadian A dan B?

Jika percobaan berhasil diselesaikan, bandingkan pendekatan berikut dengan pendekatan yang kamu temukan.

Alternatif penyelesaian:

Perhatikan ilustrasi kejadian A dan B pada diagram Venn berikut.



- a. Karena kejadian A dan B saling lepas atau tidak memiliki irisan, maka hubungan kejadian keduanya adalah $(A \cap B) = \{ \}$.
- b. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, sehingga banyak anggota ruang sampelnya, $n(S) = 10$.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, sehingga banyak anggota A adalah $n(A) = 5$.

$B = \{3, 5, 7\}$, sehingga banyak anggota B adalah $n(B) = 3$.

Dengan demikian, didapat sebagai berikut.

$$P(A) = \frac{5}{10}, P(B) = \frac{3}{10}, P(A \cap B) = 0$$

Jadi, didapat nilai $P(A \cup B)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \\ &= \frac{8}{10} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Berdasarkan **Contoh 4.6**, coba tuliskan istilah matematika yang digunakan. Selanjutnya, diskusikan pertanyaan berikut.

- Kejadian seperti apa yang dapat digabungkan untuk menghasilkan kejadian majemuk saling lepas?
- Mengenai kejadian majemuk saling lepas, apa yang kalian ketahui?
- Dapatkah sifat-sifat suatu kejadian digambarkan sebagai kejadian majemuk saling lepas?
- Bagaimana cara menghitung peluang kejadian majemuk saling lepas?



Ayo, Berpikir Kritis

Menurut Azkiya, jika dipilih tiga buah apel secara acak dari keranjang yang berisi empat buah apel merah dan empat buah apel hijau, kemungkinan terpilihnya dua buah apel merah dan dua buah apel hijau adalah nol (0). Bagaimana pendapat kalian mengenai pernyataan Azkiya? Jelaskan.



Gambar 4.13 Keranjang Apel

Contoh 4.7

Bagaimana cara menghitung peluang munculnya mata dadu berjumlah 5 atau 7 jika kedua dadu dilempar secara bersamaan?

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: A = kejadian muncul mata dadu berjumlah 5

B = kejadian muncul mata dadu berjumlah 7

Peristiwa ini merupakan kejadian saling lepas, karena tidak mungkin terjadinya secara bersamaan untuk pelemparan mata dadu berjumlah 7 sekaligus berjumlah 5.

Berikut peluang terjadinya muncul mata dadu berjumlah 5 atau 7.

Banyak sampel seluruhnya adalah 36 atau $n(S) = 36$.

Banyak sampel mata dadu berjumlah 5 ada sebanyak 4 atau $n(A) = 4$, yaitu $A = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

Bayak sampel mata dadu berjumlah 7 ada sebanyak 6 atau $n(B) = 6$, yaitu $B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$.

Dengan demikian, peluang muncul mata dadu berjumlah 5 atau berjumlah 7 adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\&= \frac{4}{36} + \frac{6}{36} \\&= \frac{10}{36} \\&= \frac{5}{18}\end{aligned}$$

Jadi, peluang muncul mata dadu berjumlah 5 atau 7 adalah $\frac{5}{18}$.

Contoh 4.8

Seorang manajer perusahaan Y memilih berkas lamaran pekerjaan secara acak dari 15 berkas yang diserahkan oleh lima orang lulusan perguruan tinggi B dan sepuluh orang lulusan perguruan tinggi A. Untuk semua kandidat, tujuh orang mempunyai pengalaman kerja di atas 2 tahun, lima orang tidak mempunyai

pengalaman kerja, dan tiga orang diketahui telah bekerja di perusahaan atau organisasi tertentu di bawah 2 tahun. Tentukan cara mengekstrak kejadian saling lepas dan peluang kejadian tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: A = pelamar dari lulusan perguruan tinggi A

B = pelamar dari lulusan perguruan tinggi B

C = pelamar memiliki pengalaman kerja di bawah 2 tahun

D = pelamar memiliki pengalaman kerja di atas 2 tahun

E = pelamar belum memiliki pengalaman kerja

Kemungkinan Kejadian Pertama

Notasi suatu kejadian pelamar dari lulusan perguruan tinggi A atau B adalah $A \cup B$.

Karena pada saat pemilihan berkas lamaran lulusan perguruan tinggi A dan B tidak dapat terjadi secara bersamaan, maka kejadian ini bersifat saling lepas. Berikut gambaran kemungkinan terpilihnya secara acak untuk berkas lamaran lulusan perguruan tinggi A atau perguruan tinggi B.

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\&= \frac{10}{15} + \frac{5}{15} \\&= \frac{15}{15} \\&= 1\end{aligned}$$

Kemungkinan Kejadian Kedua

Notasi suatu kejadian pelamar memiliki pengalaman kerja adalah $C \cup D$.

Karena kandidat dengan pengalaman di bawah 2 tahun dan di atas 2 tahun tidak dapat dipilih pada saat yang bersamaan, maka kejadian ini bersifat saling lepas. Berikut peluang terpilihnya individu dengan pengalaman kerja di bawah 2 tahun atau yang memiliki pengalaman kerja di atas 2 tahun.

$$\begin{aligned}
 P(C \cup D) &= P(C) + P(D) \\
 &= \frac{3}{15} + \frac{7}{15} \\
 &= \frac{10}{15} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Kemungkinan Kejadian Ketiga

Notasi suatu kejadian pelamar dengan pengalaman kerja di bawah 2 tahun adalah $C \cup E$.

Karena tidak mungkin untuk memilih pelamar tanpa pengalaman kerja dan pelamar yang memiliki pengalaman profesional di bawah 2 tahun pada saat bersamaan, maka kejadian ini bersifat saling lepas. Berikut peluang memilih berkas kandidat dengan pengalaman kerja di bawah 2 tahun atau tidak sama sekali.

$$\begin{aligned}
 P(C \cup E) &= P(C) + P(E) \\
 &= \frac{3}{15} + \frac{5}{15} \\
 &= \frac{8}{15}
 \end{aligned}$$

Kemungkinan Kejadian Keempat

Notasi suatu kejadian pelamar berpengalaman di atas 2 tahun atau tidak memiliki pengalaman kerja adalah $D \cup E$.

Karena pemilihan individu yang mempunyai pengalaman kerja di atas 2 tahun atau tidak memiliki pengalaman kerja tidak dapat dilakukan secara bersamaan, maka kejadian ini bersifat saling lepas. Berikut peluang kejadian untuk memilih kandidat dengan atau tanpa pengalaman kerja di atas 2 tahun.

$$\begin{aligned}
 P(D \cup E) &= P(D) + P(E) \\
 &= \frac{7}{15} + \frac{5}{15} \\
 &= \frac{12}{15} \\
 &= \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$



Ayo, Berkomunikasi

Cobalah untuk menyimpulkan penjelasan pada Contoh 4.6 dan 4.7. Apa yang dapat kamu simpulkan mengenai peluang kejadian majemuk saling lepas? Selanjutnya, berkonsultasilah dengan guru dan diskusikan dengan temanmu untuk mendapatkan jawaban yang benar dan komprehensif.



Petunjuk

- Sebagaimana sajian pada bagian pendahuluan, seberapa sering kejadian majemuk saling lepas terjadi?
- Tentukan banyaknya diagram Venn untuk kejadian majemuk saling lepas yang ada.
- Bagaimana cara menghitung peluang terjadinya dua kejadian majemuk saling lepas?
- Identifikasi dan daftarkan banyaknya jenis kejadian majemuk yang saling lepas.

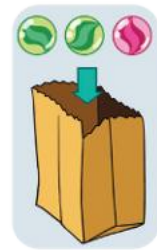
5. Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas



Ayo, Bereksplorasi

Bekerja samalah dengan seorang teman. Dengan menggunakan kelereng yang tersedia, ambil sebutir kelereng secara acak dari kantong. Kemudian, masukkan kembali kelereng ke dalam kantong dan ambil kelereng kedua.

- Gunakan diagram cabang untuk mencari peluang kedua kelereng berwarna hijau.
- Dalam diagram cabang, apakah peluang mendapatkan kelereng hijau pada pengambilan kedua bergantung pada warna kelereng pertama? Jelaskan.

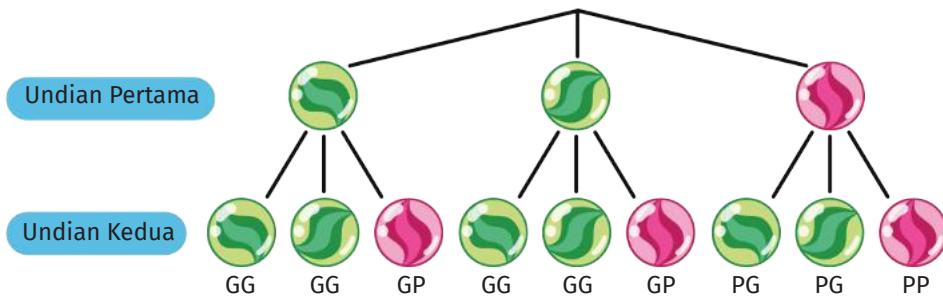


Gambar 4.14 Tiga Kelereng dan Kantong

Melakukan Percobaan

Lakukan dua percobaan berikut.

- Dalam percobaan pertama, ambil dua kelereng secara acak dari kantong sebanyak 36 kali. Catat setiap hasil sebagai GG atau GP. Buat diagram cabang dari hasil percobaan kalian.



Berapa peluang terambil dua kelereng hijau? Apakah jawaban ini tampak masuk akal? Jelaskan.

- Dalam percobaan kedua, ambil satu kelereng secara acak dari kantong. Kemudian, masukkan kembali dan ambil kelereng kedua. Ulangi percobaan ini sebanyak 36 kali. Catat setiap hasil sebagai GG, GP, atau PP. Buat diagram cabang dari hasil percobaan kalian.

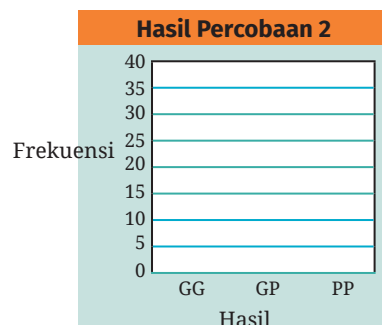
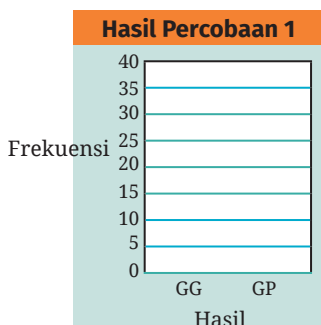
Berapa peluang eksperimental untuk mengambil dua kelereng hijau? Apakah jawaban ini tampak masuk akal? Jelaskan.

Percobaan Pertama

GG	
GP	

Percobaan Kedua

GG	
GP	
PP	





Ayo, Mencoba

Amati dengan cermat percobaan yang dilakukan oleh Farizwan.

Jika Farizwan melempar dua dadu merah dan putih secara bersamaan, maka peluang munculnya angka 2 pada dadu merah dan angka 5 pada dadu putih adalah sebagai berikut.

Misalkan: A = kejadian muncul angka 2 pada dadu merah

B = kejadian muncul angka 5 pada dadu putih

Peristiwa ini merupakan kejadian majemuk saling bebas, artinya tampilan pada dadu merah tidak mempengaruhi tampilan pada dadu putih. Oleh karena itu, dapat berdiri sendiri atau tidak bergantung pada kejadian lainnya. Peluang munculnya angka 2 pada dadu merah dan angka 5 pada dadu putih adalah sebagai berikut.

Banyak sampel keseluruhannya yaitu $n(S) = 36$.

Kejadian muncul mata dadu 2 pada dadu warna merah ada 6 atau $n(A) = 6$, yaitu $A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$.

Kejadian muncul mata dadu 5 pada dadu warna putih ada 6 atau $n(B) = 6$, yaitu $B = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5)\}$.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \\ &= \frac{6}{36} \times \frac{6}{36} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Jadi, peluang munculnya 2 pada dadu merah dan 5 pada dadu putih adalah $\frac{1}{36}$.

Cobalah eksplorasi pengetahuanmu dan diskusikan ketiga pertanyaan berikut.

1. Apa jenis kejadian untuk menghasilkan kejadian majemuk yang tidak bergantung satu sama lain?



Gambar 4.15 Dua Dadu

2. Apa rumus untuk menghitung peluang kejadian majemuk yang terjadi secara independen satu sama lain?
3. Apakah mungkin untuk mendefinisikan suatu peristiwa sebagai peristiwa majemuk yang independen dalam keadaan tertentu?

Definisi Kejadian Majemuk Saling Bebas

Jika suatu kejadian tidak mempengaruhi kejadian yang lainnya, maka dua kejadian A dan B dapat disebut sebagai kejadian majemuk yang saling bebas. Artinya, ada hubungan antara kejadian A dan B, namun tidak lepas satu sama lain. Secara matematis, rumus berikut menyatakan kejadian A dan B sebagai kejadian yang saling bebas.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Contoh 4.9

Secara bersamaan, dilemparkan dua dadu dan sekeping koin sebanyak satu kali. Berapakah peluang muncul angka genap pada dadu dan muncul gambar (G) pada koin?

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: A = kejadian munculnya angka genap pada dadu

B = kejadian munculnya gambar (G) pada koin

Kejadian ini merupakan kejadian yang berdiri sendiri. Hal ini dikarenakan munculnya angka genap pada dadu tidak mengubah gambar (G) pada uang logam tersebut.

Peluang munculnya angka genap pada dadu dan gambar (G) pada koin adalah sebagai berikut.

Banyak sampel keseluruhannya yaitu $n(S) = 12$.

Banyak sampel munculnya angka genap pada dadu ada 6 atau $n(A) = 6$,

yaitu $A = \{(2, A), (2, G), (4, A), (4, G), (6, A), (6, G)\}$.

Sampel dari munculnya gambar (G) ada 6 atau $n(B) = 6$, yaitu $B = \{(1, G), (2, G), (3, G), (4, G), (5, G), (6, G)\}$.

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \\
 &= \frac{6}{12} \times \frac{6}{12} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Jadi, peluang muncul angka genap pada dadu dan muncul gambar (G) pada koin tersebut adalah $\frac{1}{4}$.

Contoh 4.10

Jika dua dadu dilemparkan bersama sebanyak dua kali, berapa peluang munculnya mata dadu berjumlah 7 dan 11?

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: Y_1 = kejadian munculnya mata dadu berjumlah 7 pada lemparan pertama

Y_2 = kejadian munculnya mata dadu berjumlah 7 pada lemparan kedua

Z_1 = kejadian munculnya mata dadu berjumlah 11 pada lemparan pertama

Z_2 = kejadian munculnya mata dadu berjumlah 11 pada lemparan kedua

Peristiwa-peristiwa di atas disebut sebagai kejadian yang berdiri sendiri atau saling bebas. Misalnya, lemparan pertama berjumlah 7 dan lemparan kedua berjumlah 11 muncul secara terpisah. Begitu pula lemparan pertama berjumlah 11 dan lemparan kedua berjumlah 7. Berikut penjelasan peluang mata dadu berjumlah 7 dan 11 akan muncul dalam dua lemparan.

$$\begin{aligned}
 P[(Y_1 \cap Z_2) \cup (Z_1 \cap Y_2)] &= P(Y_1) \times P(Z_2) + P(Y_2) \times P(Z_1) \\
 &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{18} + \frac{1}{18} \times \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1}{108} \times \frac{1}{108} \\
 &= \frac{1}{54}
 \end{aligned}$$

Jadi, peluang muncul mata dadu berjumlah 7 dan 11 pada dua kali lemparan adalah $\frac{1}{54}$.



Ayo, Berpikir Kreatif

Berdasarkan uraian pada Contoh 4.9 dan 4.10, coba buatlah kesimpulan tentang peluang kejadian majemuk saling bebas.



Ayo, Berkomunikasi

Sajikan jawaban kalian terhadap hasil diskusi pada kegiatan *Ayo, Berpikir Kreatif* di depan kelas. Kemudian, diskusikan dengan guru dan teman untuk mendapatkan jawaban yang benar dan lengkap.



Petunjuk

Coba tuliskan hasil penelusuranmu.

1. Apa yang kamu ketahui tentang peluang kejadian majemuk saling bebas?
2. Temukan berapa banyak bentuk diagram Venn untuk kejadian majemuk saling bebas?
3. Bagaimana cara menemukan rumus peluang kejadian majemuk saling bebas?
4. Sebutkan jenis kejadian majemuk saling bebas dan sebutkan simbolnya.



Ayo, Berefleksi

Tuliskan apa yang kamu pelajari tentang kejadian majemuk saling lepas dan saling bebas.

1. Apa yang dimaksud dengan kejadian majemuk, kejadian majemuk saling lepas, dan kejadian majemuk saling bebas?
2. Bagaimana cara menentukan peluang dari kejadian majemuk?

3. Bagaimana cara menentukan peluang dari kejadian majemuk saling lepas?
4. Bagaimana cara menentukan peluang dari kejadian majemuk saling bebas?
5. Apakah ada hubungannya antara kejadian majemuk saling lepas dengan kejadian majemuk saling bebas?

Latihan 4.2

1. Sekelompok ilmuwan ingin melakukan penelitian serangga berbahaya di Sulawesi Tenggara. Misalkan A mewakili kemungkinan cuaca buruk, B mewakili kemungkinan masalah dengan instansi pemerintah daerah, dan C mewakili kemungkinan masalah dengan peralatan fotografi mereka. Tentukan minimal tiga kejadian majemuk yang mungkin terjadi.
2. Jika kejadian A adalah kejadian muncul mata dadu habis dibagi 6 dan kejadian B adalah kejadian muncul mata dadu habis dibagi 5. Tentukan tentukan peluang dari $P(A \cap B)$ dan $P(A \cup B)$.
3. Rudi melempar dua dadu merah dan putih secara bersamaan. Eko yang melihatnya mengatakan bahwa peluang munculnya angka 2 pada dadu merah atau angka 4 pada dadu putih adalah $\frac{1}{3}$. Anita tidak setuju dengan pendapat Eko. Anita memiliki pendapat sendiri terhadap peluang yang dimaksud, yaitu sebesar $\frac{11}{36}$. Pendapat siapa yang lebih tepat? Jelaskan.
4. Diketahui dalam suatu keranjang berisi 4 buah apel berwarna merah dan 4 buah apel berwarna hijau. Jika kamu mengambil 3 buah apel dari keranjang tersebut, tentukan peluang terpilih 2 buah apel merah dan 2 buah apel hijau.
5. Dalam suatu tas terdapat 5 bola merah dan 2 bola biru. Tas lain berisi tiga bola merah dan satu bola biru. Tentukan peluang terambilnya bola biru secara acak dari salah satu tas.
6. Dua set kartu ada di atas meja. Setiap set kartu berisi 52 lembar dengan empat warna, yaitu merah, kuning, hijau, dan biru. Ada 13 kartu dalam setiap warna, bernomor 1 sampai 13. Satu kartu dari dua set kartu akan dipilih secara acak. Tentukan peluang kemungkinan mendapat kartu merah atau angka 13.

6. Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas Bersyarat



Ayo, Bereksplorasi

Jika kamu memiliki informasi parsial, ini secara efektif mengecilkan ruang sampel yang tersedia dan mengubah peluang. Marilah mulai dengan sebuah pertunjukan.

Permainan Pintu Rahasia

Permainan di mana ada suatu hadiah tersembunyi di balik salah satu dari tiga pintu. Misalnya, pintu-pintu tersebut X, Y, dan Z. Kalian dapat memenangkan hadiah dengan menebak pintu yang tepat.



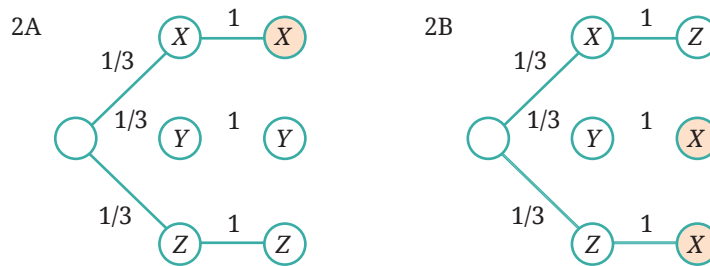
Gambar 4.16 Pintu Rahasia

Langkah 1. Kamu memilih satu pintu.

Ini menyisakan dua pintu yang tidak kamu pilih dan setidaknya satu di antaranya tidak menyembunyikan hadiah. Pembawa acara membuka satu pintu ini dan dengan cara ini menunjukkan tidak ada hadiah yang disembunyikan di sana. Kemudian, ia bertanya apakah kamu ingin mempertimbangkannya kembali. Apakah kamu mau?

Langkah 2A. Kamu tetap pada pilihan awal.

Langkah 2B. Kamu beralih ke pintu lain yang tersedia. Mungkin mengejutkan, Langkah 2B adalah strategi yang lebih baik. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.17, ini menggandakan peluangmu untuk memenangkan hadiah.



Gambar 4.17 Peluang Langkah 2A dan Langkah 2B

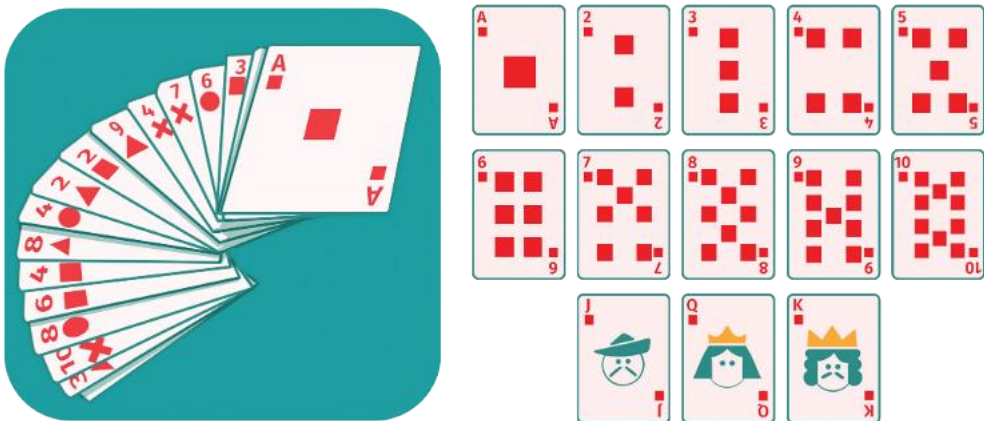
Misalkan hadiah berada di balik pintu X. Peluang untuk menang meningkat dari $\frac{1}{3}$ di Langkah 2A menjadi $\frac{2}{3}$ di Langkah 2B.



Ayo, Mencoba

Tersedia satu set 52 kartu. Berikut kemungkinan mendapatkan kartu hati. Percobaan ini dapat dilakukan jika dua kartu diambil secara acak, berturut-turut, dan tanpa jeda.

Perhatikan Gambar 4.18 berikut.



Gambar 4.18 Kumpulan Kartu

Banyak sampel keseluruhannya yaitu $n(S) = 52$.

Banyak sampel dari munculnya kartu hati yaitu $n(A) = 13$.

Misalkan: A = kejadian terambil kartu hati pada pengambilan pertama

B = kejadian terambil kartu hati pada pengambilan kedua

Pada pengambilan pertama diperoleh kartu hati ada sebanyak 13 kartu, sedangkan banyak kartu hati pada pengambilan kedua sudah berkurang satu kartu, sehingga banyak kartu hati menjadi 12. Hal ini terjadi karena kejadian pengambilan kartu hati pertama berdampak pada kejadian pengambilan kartu hati kedua. Peluang terambilnya kedua kartu hati adalah sebagai berikut.

$P(A) = \frac{13}{52}$ dan $P(B|A) = \frac{12}{51}$, sehingga peluang seluruhnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A) \times P(B|A) \\&= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \\&= \frac{156}{2.652} \\&= \frac{3}{51}\end{aligned}$$



Tahukah Kalian

Kejadian $B|A$ merupakan suatu kejadian B terjadi setelah A terjadi.

Coba kamu tuliskan istilah-istilah matematika pada kegiatan eksplorasi ini, kemudian diskusikanlah pertanyaan berikut.

- Kejadian seperti apa yang dapat dikatakan sebagai kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
- Bagaimana cara menentukan peluang dari kejadian majemuk saling bebas bersyarat?

Definisi Kejadian Majemuk Saling Bebas Bersyarat

Dua kejadian A dan B dapat dikatakan sebagai kejadian majemuk saling bebas bersyarat, apabila memenuhi persyaratan saling bebas dan terjadinya secara urutan.

Kejadian A dan B dikatakan kejadian majemuk bebas bersyarat yang secara matematis didefinisikan sebagai berikut.

Dari rumus ini dapat pula diturunkan ke rumus berikut.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(s)}}{\frac{n(A)}{n(s)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \text{ atau } P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Dengan $P(B|A)$ dibaca peluang kejadian B setelah A.

Contoh 4.11

Satu kartu dari 52 kartu dipilih secara acak. Berapa peluang terambilnya kartu berwarna merah jika terambil kartu bernomor lebih dari dua dan kurang dari sepuluh?

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: C = kejadian terambil kartu berwarna merah

D = kejadian terambil kartu yang lebih besar dari dua dan lebih kecil dari sepuluh

Kejadian ini merupakan kejadian mejemuk bebas bersyarat, karena kartu yang diambil adalah kartu merah dengan nilai lebih dari dua dan kurang dari sepuluh. Peluang kemungkinan terambilnya kartu merah lebih dari dua tetapi kurang dari sepuluh adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(C \cap D) &= P(C) \times P(D|C) \\ &= \frac{26}{52} \times \frac{14}{26} \\ &= \frac{14}{52} \\ &= \frac{7}{26} \end{aligned}$$

Contoh 4.12

Formasi manajemen 200 manajer pada suatu perusahaan ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 4.5 Formasi Manajer

Manajer	Laki-laki (L)	Wanita (W)
Manajer Senior (S)	18	2
Manajer Menengah (M)	36	24
Manajer Bawah (B)	24	96

- Berapa kemungkinan dipilih satu manajer secara acak untuk manajer laki-laki atau manajer senior?
- Jika 2 manajer dipilih secara acak, berapa kemungkinan terpilih manajer laki-laki dan manajer wanita?
- Berapa peluang pilihan pertama manajer laki-laki dan pilihan kedua manajer pria lain?

Alternatif penyelesaian:

- Prosedur penyelesaian berikut digunakan untuk memilih peluang bagi manajer laki-laki atau senior.

$$\begin{aligned}P(L \cup S) &= P(L) + P(S) - P(L \cap S) \\&= \frac{78}{200} + \frac{20}{200} - \frac{18}{200} \\&= \frac{80}{200} \\&= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Jadi, peluang terpilih manajer laki-laki atau manajer senior adalah $\frac{2}{5}$.

- Peluang terpilih manajer pria dan wanita dari sampel acak dua manajer ditentukan dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 P(1L, 1W) &= \frac{C_1^{78} \times C_1^{122}}{C_2^{200}} \\
 &= \frac{78 \times 122}{\frac{200 \times 199}{2}} \\
 &= \frac{9.516}{19.900} \\
 &= \frac{2.379}{4.975}
 \end{aligned}$$

Jadi, peluang terpilih seorang manajer seorang pria dan wanita dari pemilihan secara acak dua orang manajer adalah $\frac{2.379}{4.975}$.

- c. Peluang terpilih manajer laki-laki dari dua kali pemilihan secara terurut didapat dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 P(L_1 \cap L_2) &= P(L_1) \times P(L_2|L_1) \\
 &= \frac{78}{200} \times \frac{77}{199} \\
 &= \frac{6.006}{39.800} \\
 &= \frac{3.003}{19.900}
 \end{aligned}$$

Jadi, peluang terpilih manajer laki-laki dari dua kali pemilihan berturut-turut adalah $\frac{3.003}{19.900}$.



Ayo, Berpikir Kreatif

Berdasarkan uraian pada Contoh 4.11 dan 4.12, coba buatlah kesimpulan yang dapat kamu tulis tentang peluang majemuk saling bebas bersyarat.



Ayo, Berkomunikasi

Sampaikan hasil diskusimu bersama teman pada kegiatan *Ayo, Berpikir Kreatif* di depan kelas. Kemudian, diskusikan bersama teman dan guru untuk mendapatkan jawaban yang benar dan lengkap.



Petunjuk

Coba tulislah hasil penelusuranmu.

1. Apa yang kamu ketahui tentang peluang kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
2. Temukan, adakah bentuk diagram Venn untuk kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
3. Bagaimana cara menemukan rumus peluang kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
4. Sebutkan ada berapa jenis kejadian majemuk saling bebas bersyarat dan sebutkan simbolnya.



Ayo, Berefleksi

Tuliskan apa yang telah kamu pelajari tentang kejadian majemuk saling bebas bersyarat.

1. Apa saja syarat suatu kejadian termasuk dalam kategori kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
2. Apa yang dimaksud dengan kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
3. Bagaimana cara menentukan peluang kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
4. Apakah ada hubungannya antara kejadian majemuk saling lepas, kejadian majemuk saling bebas, dengan kejadian majemuk saling bebas bersyarat?

Latihan 4.3

1. Dalam waktu yang bersamaan, dua dadu dilemparkan. Jika A adalah kejadian muncul dua dadu yang hasil kalinya 12 dan B adalah kejadian muncul dua mata dadu berjumlah 8, tentukanlah $P(A|B)$ dan $P(B|A)$.
2. Dua kartu dipilih secara acak satu per satu dari tumpukan 52 kartu tanpa pengembalian. Tentukan peluang terpilihnya kartu pertama adalah kartu As dan kartu kedua adalah kartu King.

3. Dalam satu kelas terdapat 40 siswa, 34 siswa menyukai matematika, 22 siswa menyukai fisika, serta 2 siswa tidak menyukai keduanya. Ketika seorang siswa dipilih secara acak, temukan minimal sebanyak tiga cara berbeda untuk menentukan berapa banyak peluang siswa tersebut menyukai matematika setelah mengetahui dia menyukai fisika.
4. Diketahui pada suatu kotak berisi 4 bola hijau dan 6 bola kuning. Jika diambil 4 bola secara acak satu per satu dari dalam kotak tersebut, tentukanlah peluang bahwa pada pengambilan pertama dan kedua terambil bola hijau serta pada pengambilan ketiga dan keempat terambil bola kuning. Jika syarat pengambilan itu:
 - a. tanpa pengembalian, dan
 - b. dengan pengembalian.
5. Ada 5 bola hitam dan 5 bola putih dalam satu kantong. Jika dua bola diambil secara acak sebanyak tiga kali berturut-turut, tentukanlah peluang kemungkinan akan terambilnya dua bola hitam, dua bola hitam, dan dua bola putih pada pengambilan pertama, kedua, dan ketiga. Jika syarat pengambilan tersebut:
 - a. tanpa pengembalian, dan
 - b. dengan pengembalian.

Uji Kompetensi Bab 4

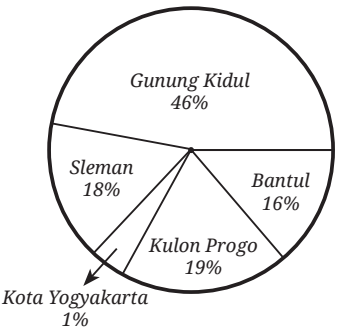
1. Luas Daerah Istimewa Yogyakarta (DIY) terbilang kecil jika dibandingkan dengan provinsi lain di sekitarnya. Selama ini, selalu ada wisatawan yang berkunjung ke DIY, khususnya di Kota Yogyakarta, dari berbagai seluruh pelosok negeri. Salah satu lokasi yang paling diminati oleh anak-anak sekolah adalah Taman Pintar. Informasi demografi DIY ditunjukkan pada tabel berikut, sedangkan proporsi luas wilayah masing-masing kabupaten DIY ditunjukkan pada diagram.

**Jumlah Penduduk menurut Jenis Kelamin
di Provinsi DI Yogyakarta
(Hasil Sensus Penduduk Tahun 2020)**

Kota atau Kabupaten	Laki-Laki	Perempuan	Total
Kulon Progo	216.167	220.228	436.395
Bantul	491.003	494.737	985.770
Gunung Kidul	369.323	377.838	747.161
Sleman	559.385	566.419	1.125.804
Kota Yogyakarta	182.019	191.570	373.589
Provinsi DIY	1.817.927	1.850.792	3.668.719

Sumber: <https://sensus.bps.go.id/topik/tabular/sp2020/2/15/0>

**Diagram Proporsi Luas
Wilayah Kabupaten di DIY**



Sumber: <https://yogyakarta.bps.go.id>

Proses seleksi untuk menjadi pemandu di Taman Pintar telah berlangsung pada tahun 2020. Seseorang dari DIY mengajukan lamaran pada waktu yang ditentukan dan saat ini sedang menjalani wawancara.

Pernyataan	Benar	Salah
Jika pelamar tersebut ternyata berdomisili di Bantul, pada tingkat ketelitian tertentu peluang dia laki-laki atau perempuan sama besar.		
Peluang pelamar tersebut mahasiswa perempuan dan berdomisili di Kota Yogyakarta lebih besar, karena persentase perempuan di Kota Yogyakarta lebih besar.		

Pernyataan	Benar	Salah
Kemungkinan pelamar tersebut laki-laki dan berdomisili Gunung Kidul paling besar, karena luas daerahnya paling besar, yaitu 46%.		
Nilai kemungkinan pelamar tersebut laki-laki dan berdomisili di Kota Yogyakarta paling kecil, karena persentase penduduk Kota Yogyakarta paling kecil.		

2. Berfoto Bersama *Boy Band*



Aksa, Dafa, Zavi, Evan, dan Reksa adalah anggota grup musik yang berpose berjajar untuk difoto. Antusiasme mereka terhadap latihan ini bermula dari keinginan mereka untuk membuat poster. Rencananya akan mereka lakukan dengan memamerkan gaya mereka yang beragam secara bergantian. Sebelum mereka menyadari berapa banyak foto yang telah diambil, sang fotografer hanya menuruti permintaan mereka.

Berdasarkan wacana di atas, berilah tanda centang dan bisa lebih dari satu jawaban yang benar dari pernyataan berikut.

- ☐ Jika mereka berfoto tidak ada aturan maka, peluangnya adalah $\frac{120}{120} = 1$.
- ☐ Jika mereka berfoto ada aturannya, maka peluangnya adalah $\frac{120}{120} = 1$.
- ☐ Jika Evan selalu ingin berfoto di sebelah kiri pojok, maka peluang terjadiannya adalah $\frac{1}{5}$.

3. Suatu percobaan dilakukan dengan ketentuan sebagai berikut.
- ▶ Pertama kali dilakukan pelemparan sekeping uang logam.
 - ▶ Jika dalam pelemparan uang logam muncul sisi gambar, maka percobaan dilanjutkan dengan pelemparan uang logam. Sementara itu, jika muncul sisi angka, maka percobaan dilanjutkan dengan sebuah dadu bersisi enam.
 - ▶ Jika sampai dengan pelemparan uang logam untuk ketiga kalinya selalu muncul gambar, percobaan dihentikan.
 - ▶ Jika dalam pelemparan dadu muncul angka genap, pelemparan dihentikan.
 - ▶ Jika dalam pelemparan dadu muncul angka ganjil, pelemparan diulang sekali dan selanjutnya pelemparan dihentikan apapun angka yang muncul.

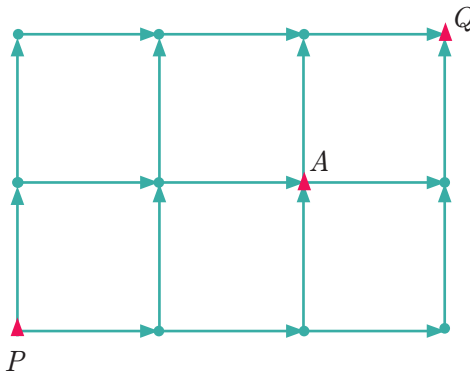
Peluang bahwa dalam percobaan tersebut tidak pernah terjadi pelemparan dadu adalah

- a. 1
 - b. $\frac{1}{2}$
 - c. $\frac{1}{16}$
 - d. $\frac{1}{32}$
 - e. $\frac{1}{64}$
4. Dua dadu dan sekeping koin akan dilemparkan secara bersamaan dan sisi dadu yang muncul akan dicatat. Jika kemunculan masing-masing dadu diyakini seimbang dan kemunculan masing-masing koin seimbang, peluang muncul sisi angka pada koin dan kedua mata dadu yang berjumlah 5 adalah
- a. $\frac{1}{16}$
 - b. $\frac{1}{18}$
 - c. $\frac{1}{36}$
 - d. $\frac{1}{72}$
 - e. $\frac{1}{144}$

5. Ada dua set kartu yang diletakkan di atas meja. Setiap set terdiri dari 52 lembar kartu dan setiap set masing-masing memiliki empat warna berbeda, yaitu merah, kuning, hijau, dan biru. Ada sebanyak 13 kartu yang bernomor 1 hingga 13 pada setiap warna. Akan diambil satu kartu secara acak dari dua set kartu tersebut. Peluang terambilnya kartu bernomor 13 atau kartu berwarna merah adalah

- $\frac{31}{104}$
- $\frac{26}{104}$
- $\frac{19}{52}$
- $\frac{8}{26}$
- $\frac{5}{13}$

6. Jalan satu arah ditunjukkan oleh tanda panah pada peta jalan pada gambar berikut mulai dari titik P ke Q.



Ervina akan pergi dari P ke Q. Berapa peluang ia akan mengambil rute A?

7. Suatu kotak berisi 3 kelereng merah, 4 kelereng hijau, dan 5 kelereng biru. Berapa peluang terambilnya 3 kelereng dari kotak tersebut, jika:
- semua kelereng merah;
 - semua kelereng biru;
 - dua merah dan satu hijau; serta
 - satu merah, satu hijau, dan satu biru.

8. Suatu dompet berisi 4 keping uang logam seribu rupiah dan 3 keping uang logam lima ratus rupiah. Dompet kedua berisi 3 keping uang logam seribu rupiah dan 5 keping uang lima ratus rupiah. Satu koin diambil dari dompet pertama dan dimasukkan ke dompet kedua. Jika kemudian diambil sekeping uang logam dari dompet kedua, berapa peluang bahwa uang logam yang diambil dari dompet kedua tersebut adalah logam lima ratus rupiah?
9. Suatu kantong berisi enam bola merah dan empat bola biru. Dari kantong tersebut akan diambil dua bola berturut-turut. Berapa peluang terambilnya dua bola biru, jika:
 - a. dengan pengembalian, dan
 - b. tanpa pengembalian.
10. Sumarji adalah manajer Timnas Indonesia. Suatu ketika Timnas bertanding di Final Piala Dunia 2026 melawan Argentina. Suatu ketika saat pertandingan sedang berjalan, pada menit ke 87 Timnas Indonesia mendapatkan hadiah Penalti. Skor sementara adalah 3 – 3. Pemain yang siap menendang adalah Marcelino Ferdinan, Rafel Struick, Risky Ridho, Egy Maulana Vikri, dan Dendy Sulistyawan. Seandainya Sumarji diminta untuk menentukan penendang penalti tersebut, siapakah yang akan Sumarji tunjuk agar Timnas Indonesia meraih kemenangan. Berikut catatan tendangan penalti kelima pemain tersebut.

Nama	Penalti (Kali)	Masuk	Terblok Kiper	Melenceng
Rafel Struick	20	12	6	2
Marcelino Ferdinan	18	14	2	2
Risky Ridho	16	9	4	3
Egy Maulana Vikri	14	10	3	1
Dendy Sulistyawan	10	5	4	1

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, berikan tanggapan atas beberapa pertanyaan di bawah ini.

1. Kendala apa saja yang dapat kamu selesaikan untuk mempelajari materi peluang?
2. Strategi apa yang kamu gunakan untuk memahami secara mendalam terhadap soal cerita tentang materi peluang kejadian majemuk?
3. Bagaimana kamu melihat konsep peluang diterapkan dalam tindakan dan pengalamanmu sehari-hari?
4. Apakah ada kesamaan antara materi ini dengan situasi dalam kehidupan nyata?
5. Pada materi peluang, kegiatan pembelajaran manakah yang membuat kamu menyukainya? Apa alasannya?
6. Bagaimana perasaan kalian saat memainkan permainan atau melakukan eksperimen berdasarkan materi peluang?

Glosarium

A

anggota himpunan	suatu objek dalam suatu himpunan.
anuitas	serangkaian pembayaran atau penerimaan yang dilakukan atau diterima pada jangka waktu yang teratur dalam jumlah yang sama, sering digunakan pada pinjaman atau investasi.
anuitas pada kasus pinjaman	anuitas pada kasus pinjaman biasanya merupakan sistem pembayaran yang dilakukan pada periode waktu yang teratur dalam jumlah yang sama atas sebuah pinjaman. $\text{anuitas} = \text{angsuran} + \text{bunga}$.
angsuran	bagian dari anuitas dalam kasus pinjaman, di mana $\text{anuitas} = \text{angsuran} + \text{bunga}$
angsuran pokok	bagian dari pembayaran angsuran (pinjaman atau kredit) yang digunakan untuk melunasi nilai hutang asli, tidak termasuk bunga.
aturan penjumlahan	salah satu aturan dalam Kaidah Pencacahan untuk menentukan jumlah cara suatu kejadian dapat terjadi, biasanya digunakan ketika pilihan-pilihan tersebut saling lepas (tidak terjadi bersamaan).
aturan pengisian tempat	prinsip dasar dalam Kombinatorik untuk menentukan banyaknya cara suatu kejadian dapat terjadi, biasanya melibatkan perkalian banyaknya pilihan di setiap tahap.
aturan perkalian	salah satu aturan dalam Kaidah Pencacahan untuk menentukan jumlah cara suatu rangkaian kejadian dapat terjadi, biasanya digunakan ketika kejadian-kejadian tersebut saling bebas (kejadian satu tidak memengaruhi kejadian lain).

B

barisan bilangan	barisan bilangan merupakan kumpulan bilangan yang memiliki urutan dan disusun menurut pola tertentu.
barisan aritmetika	urutan bilangan yang memiliki beda (selisih) tetap antara suku yang berurutan.
beda	selisih konstan antara dua suku yang berurutan dalam barisan aritmatika, yang dilambangkan dengan huruf b .
besar bunga	besar bunga dapat menggunakan rumus $B = M \times p\% \times n$.
bunga majemuk	bunga yang dihitung berdasarkan uang pokok (modal awal) ditambah dengan bunga yang sudah diakumulasikan dari periode bunga sebelumnya (bunga berbunga). Misalkan seseorang menyimpan uang di bank sebesar M dengan bunga majemuk i per tahun, maka saldo uang yang disimpan di bank setelah n periode adalah $M_n = M \times (1 + i)^n$.
bunga tunggal	imbalan atau balas jasa yang diberikan atas simpanan atau pinjaman dalam periode tertentu yang dihitung secara tunggal (hanya dari modal awal), menyebabkan penambahan besar bunga dan modal akhir secara linear.

D

data	ukuran dari suatu nilai. Data biasanya dalam bentuk bilangan, dikumpulkan dalam bentuk tabel, diolah dalam bentuk diagram.
data kontinu	data yang dihubungkan oleh garis pada grafik. Misalnya, grafik hubungan tinggi badan dengan usia.
datum	satu ukuran dari suatu nilai.
data berkelompok	data yang sudah dikelompokkan dalam kelaskelas.
data tunggal	data mentah yang belum diolah atau di kelompokkan.

deret	jumlahan dari suku-suku suatu barisan (aritmetika atau geometri).
deret bilangan	penjumlahan suku-suku pada barisan bilangan.
deret divergen	deret bilangan yang tidak dapat ditentukan jumlahnya.
deret konvergen	deret bilangan yang dapat ditentukan jumlahnya.
deret geometri	jumlahan bilangan dari Barisan Geometri.
desil	nilai yang membagi data menjadi 10 kelompok sama banyak.
desmos	aplikasi atau alat teknologi (kalkulator ilmiah) yang disarankan untuk membantu peserta didik dalam memahami konsep, khususnya Investasi dan Pinjaman.
deviasi standar	akar dari jumlah kuadrat deviasi dibagi banyaknya data.
diameter	garis lurus yang menghubungkan dua titik pada lengkungan dua titik sebarang di lengkungan tersebut.
diagram venn	suatu representasi grafis dari suatu himpunan atau himpunan-himpunan.
diagram batang	gambar yang menggunakan batang secara horizontal atau vertikal untuk menunjukkan suatu data.
distribusi binomial	salah satu jenis distribusi probabilitas diskrit untuk menggambarkan peluang sukses/gagal dari sejumlah percobaan Bernoulli yang dilakukan secara berulang dan saling bebas.

F

faktorial	hasil kali bilangan bulat positif mulai dari 1 sampai dengan bilangan itu sendiri (misalnya, $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$), digunakan dalam perhitungan permutasi dan kombinasi.
frekuensi harapan	harapan banyaknya suatu kejadian akan terjadi dari sejumlah percobaan.

fungsi linear	sebuah fungsi yang mana variabelnya berpangkat satu atau suatu fungsi yang grafiknya adalah garis lurus.
fungsi kuadrat	sebuah fungsi polinom yang memiliki peubah/ variabel dengan pangkat tertinggi adalah 2 (dua).

G

gabungan Himpunan	suatu operasi himpunan yang menghasilkan himpunan baru yang anggotanya terdiri dari semua anggota himpunan yang digabungkan, di mana anggota yang sama hanya ditulis satu kali.
grafik	suatu kerangka atau gambar yang digunakan untuk membuat objek visualisasi dari data-data pada tabel.

H

himpunan	unit yang terdiri beberapa anggota.
himpunan berhingga	suatu himpunan dengan n elemen di mana n adalah suatu bilangan bulat tak negatif Himpunan tak berhingga Suatu himpunan yang anggotanya tak berhingga.
himpunan semesta	himpunan yang memuat semua objek di bawah pertimbangan.

K

karakteristik	ciri khas atau sifat spesifik yang membedakan satu hal dari yang lain.
kejadian	himpunan bagian dari ruang sampel
kejadian majemuk	dua atau lebih kejadian yang terjadi secara bersamaan
kejadian saling bebas	dua kejadian atau lebih yang kemunculannya tidak saling mempengaruhi satu sama lain.
kejadian saling lepas	kejadian di mana tidak mungkin untuk terjadi pada hasil yang sama.

kombinasi susunan yang mungkin dari unsur-unsur yang berbeda dengan tidak memperhatikan urutannya.

kombinasi berulang pengambilan objek dengan urutan tidak diperhitungkan (pengulangan/pengembalian diperbolehkan)

L

linear posisi yang terletak pada suatu garis lurus

N

nilai masa depan perhitungan total uang yang ditabung dengan bunga dan sistem anuitas.

notasi lambang/symbol

P

peluang kemungkinan munculnya suatu kejadian/peristiwa.

peluang bersyarat peluang dua kejadian yang saling bergantung apabila terjadi atau tidak terjadinya kejadian A akan mempengaruhi terjadi atau tidak terjadinya kejadian B.

peluang saling bebas peluang dua atau lebih kejadian yang tidak saling memengaruhi.

peluang saling lepas peluang dua atau lebih kejadian yang tidak mungkin terjadi bersama-sama.

periode angka waktu atau durasi tertentu di mana bunga dihitung dan diterapkan pada pokok investasi atau pinjaman.

permutasi jumlah kemungkinan urutan objek-objek yang dipilih dengan memperhatikan urutan objek.

permutasi siklis permutasi yang susunannya melingkar (urutan melingkar).

R

rasio	nilai pengali tetap yang menghubungkan setiap suku yang berdekatan, atau hasil bagi dari suatu suku dengan suku sebelumnya.
ruang sampel	himpunan semua hasil yang mungkin dalam suatu eksperimen (dalam materi peluang).

S

simpanan	dana yang dititipkan atau ditabung pada suatu lembaga keuangan (seperti bank) dengan harapan mendapatkan bunga atau imbal hasil.
simpanan akhir	total jumlah uang yang ada di rekening tabungan atau investasi pada akhir periode tertentu, termasuk simpanan awal dan bunga yang diperoleh.
suku bunga	suku bunga dapat diartikan sebagai balas jasa yang diberikan nasabah kepada bank atas peminjaman uang di bank atau balas jasa yang diberikan pihak bank kepada nasabah atas penyimpanan uang di bank.
susunan	hasil dari Kaidah Pencacahan (baik permutasi maupun kombinasi), merujuk pada tata letak atau urutan objek.

T

titik sampel	setiap hasil yang mungkin terjadi pada suatu percobaan.
---------------------	---

V

variabel	huruf atau simbol lain yang digunakan untuk mewakili bilangan atau nilai yang tidak ditentukan.
-----------------	---

Daftar Pustaka

- As'ari, A.R., Chandra, T.D., Yuwono, I., Anwar, L., Nasution, S. H., Hasanah, D., Muksar, M., Sari, V. K., & Atikah, N. *Buku Siswa Matematika SMA/MA Kelas XII*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud. 2018.
- As'ari, A. R., Tohir, M., Valentino, E., Imron, Z., & Taufiq, I. *Buku Guru Matematika Revisi*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud. 2017.
- As'ari, A. R., Tohir, M., Valentino, E., Imron, Z., Taufiq, I., Hariarti, N. S., & Lukmana, D. A. *Matematika SMP/MTs Kelas VIII Semester 2*. Edisi Revisi. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud. 2017.
- Beswick, K., & Chapman, O. *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 4: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*. Leiden: Brill. 2020.
- Bishop, Alan, M. A. Clements, Christine Keitel-Kreidt, Jeremy Kilpatrick, and Frederick Koon-Shing Leung, eds. *Second International Handbook of Mathematics Education*. Vol. 10. New York: Springer Science & Business Media. 2012.
- Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., & Nesbitt, C. *Actuarial Mathematics*. Chicago: The Society of Actuaries. 1986. <https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH552/βίβλια/Text1.pdf>.
- Flajolet, Philippe, and Robert Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge: Cambridge University Press. 2009.
- Frensidy, B. *Matematika Keuangan*, 3 (Revisi) ed. Jakarta: Salemba Empat. 2011.
- Ghahramani, S. *Fundamentals of probability*. Cleveland: CRC Press. 2024.

- Goos, M., Vale, C., Stillman, G., Makar, K., Herbert, S., & Geiger, V. *Teaching Secondary School Mathematics: Research and Practice for The 21st Century*. London: Routledge. 2020.
- Grimmett, G., & Stirzaker, D. *Probability and random processes*. Oxford: Oxford university press. 2020.
- Grigorieva, E. *Introduction to sequences and series*. In *Methods of Solving Sequence and Series Problems* (pp. 1-63). Berlin: Springer International Publishing. 2016.
- Hájek, P., & Pudlák, P. *Metamathematics of first-order arithmetic* (Vol. 3). Cambridge: Cambridge University Press. 2017.
- Hopfenbeck, T. N., Lenkeit, J., El Masri, Y., Cantrell, K., Ryan, J., & Baird, J. A. "Lessons learned from PISA: A systematic review of peer-reviewed articles on the programme for international student assessment." *Scandinavian Journal of Educational Research*, 62(3), [2018]: 333-353.
- James, M. *Cambriedge International AS & A level mathematics: Pure Mathematics 1 Worked Solutions Manual*. Cambridge: Cambridge University Press. 2018.
- Knopp, Konrad. *Theory and Application of Infinite Series*. New York: Dover Publications. 1990.
- Kurdhi, N. A., Irdawati, S. E., Rihfenti Ernayani, S. E., Ak, M., Ali, I. H., MP, M., ... & Udi Iswadi, S. E. *Matematika Keuangan*. Batam: Cendikia Mulia Mandiri. 2023.
- Jiuhardi, S. E. *Buku Ajar Matematika Keuangan*. Surabaya: Cipta Media Nusantara. 2025.
- Larson, L. C. "Problems in Mathematical Analysis I: Real Numbers, Sequences and Series." *The American Mathematical Monthly*, 109(5), [2002]: 487.
- Leonard, M., Westra, S., Phatak, A., Lambert, M., van den Hurk, B., McInnes, K., ... & Stafford-Smith, M. "A compound event framework for understanding extreme impacts." *Wiley Interdisciplinary Reviews: Climate Change*, 5(1), [2014]: 113-128.

- Mahmudi, A. *Kombinatorika*. Yogyakarta: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY. 2019.
- MathonGo. *NCERT Solutions Class 11 Maths Chapter 9: Sequence and Series*. Accessed 6 Aug 2025. www.mathongo.com.
- National Council of Educational Research and Training (India). *Mathematics Class XI: Chapter 8 – Sequences and Series*. Reprint 2025–2026. Manipal: Manipal Technologies Limited, Udayavani Building, Press Corner. 2025. <https://ncert.nic.in/textbook/pdf/kemh1ps.pdf>.
- Ollerton, M. *The mathematics teacher's handbook*. Edinburgh: A&C Black. 2009.
- Pemberton, S. *Cambriedge International AS & A level mathematics: Pure Mathematics 1 Coursebook*. Cambridge: Cambridge University Press. 2018.
- Rudin, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd ed., New York: McGraw-Hill. 1976.
- Santner, T. J., Williams, B. J., Notz, W. I., Santner, T. J., Williams, B. J., & Notz, W. I. *Space-filling designs for computer experiments* (pp. 145-200). Springer New York. 2018.
- Save My Exams. *Sequences and Series Cheat Sheet. Edexcel Maths A-level – Year 2 Pure*. Save My Exams. 2025. www.savemyexams.co.uk.
- Schaum, Murray R. *Schaum's Outline of Calculus*. 6th ed. New York: McGraw-Hill Education. 2013.
- Slavin, R. E. *Educational psychology: Theory and practice*. Boston: Allyn & Bacon. 2012.
- Stein, Elias M., and Rami Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. New Jersey: Princeton University Press. 2003.
- Susanto, Dicky, et al. *Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*. Jakarta: Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia. 2021.
- Suwardy, M. P., Rahmawati, R. K. *Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII*. Jakarta: Grafindo. 2024.

- Tohir, M. *Pembinaan Olimpiade Matematika SMP/MTs*. Jember: Matematohir Scientific Publishing. 2018.
- Tohir, M., Anam, A.C., Ibnu, T. *Buku Matematika SMA/SMK Kelas XII Kurikulum Merdeka*. Jakarta: Pusat Perbukuan Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi. 2022.
- Tohir, M., Anam, A.C., Ibnu, T. *Buku Panduan Guru Matematika SMA/SMK Kelas XII Kurikulum Merdeka*. Jakarta: Pusat Perbukuan Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi. 2022.

Indeks

A

anuitas 36, 39, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 53, 54, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 70, 71, 75, 76, 77, 78, 172, 175
aturan pengisian tempat 82, 87
aturan penjumlahan 82, 85, 122, 172
aturan perkalian 87, 122
aturan tabel 85

B

barisan aritmetika 5, 7, 21, 24, 32, 33
barisan bilangan 3, 18, 19, 25, 33, 172, 173
barisan geometri 13, 15, 16, 28, 32, 64, 65
beda 5, 7, 8, 23, 24, 25, 81, 173
bunga majemuk 30, 36, 39, 40, 41, 44, 45, 47, 49, 50, 54, 55, 57, 61, 69, 75, 76, 173
bunga tunggal 2, 30, 31, 32, 37, 38, 39, 40, 173

D

dadu 114, 128, 129, 130, 131, 137, 138, 139, 141, 142, 148, 153, 154, 155, 156, 157, 164, 168

deret aritmetika 2, 19, 21, 22, 23, 24, 30

deret bilangan 19, 21, 24, 33, 173

deret geometri 2, 19, 25, 26, 28, 29, 30, 48, 49

F

faktorial 88, 92, 93, 174

frekuensi harapan 141, 142, 174

H

himpunan 132, 140, 172, 174, 175, 176

K

kejadian 11, 84, 87, 107, 124, 126, 131, 132, 133, 139, 140, 141, 142, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 153, 154, 155, 156, 157, 160, 161, 164, 171, 175, 176

kejadian majemuk 124, 140, 141, 142, 144, 145, 146, 147, 151, 153, 154, 156, 157, 160, 161, 164, 171, 175

kejadian majemuk saling bebas 153, 156, 157, 160, 161, 164

kejadian majemuk saling bebas bersyarat 160, 161, 164

kejadian majemuk saling lepas 145, 146, 147, 151, 156, 157, 164

kombinasi 82, 103, 104, 105, 106, 108,
109, 110, 111, 113, 114, 115, 121,
122, 125, 126, 175

kombinasi berulang 108, 109, 175

P

peluang 114, 115, 117, 118, 121, 123,
124, 126, 127, 130, 131, 132, 133,
134, 136, 137, 138, 141, 142, 144,
145, 146, 147, 148, 149, 150, 151,
152, 153, 154, 155, 156, 157, 158,
160, 161, 162, 163, 164, 165, 166,
167, 168, 169, 170, 171, 175, 176

peluang saling bebas 176

peluang saling lepas 176

percobaan 128, 129, 130, 131, 132,
138, 139, 140, 141, 144, 145, 146,
152, 153, 168, 176

permutasi 82, 92, 93, 95, 96, 97, 98, 99,
103, 105, 106, 107, 113, 114, 122,
125, 176

pinjaman dengan anuitas 65

R

rasio 12, 13, 15, 16, 25, 26, 28, 29, 48,
64, 130, 176

ruang sampel 132, 139, 142, 158, 175,
176

S

susunan 3, 88, 91, 92, 93, 95, 96, 97,
98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105,
107, 114, 115, 117, 121, 125, 126,
175

Penulis



**Mohammad
Tohir,
S.Pd., M.Pd.**

Email

matematohir@ibrahimy.ac.id

Instansi

Universitas Ibrahimy, Situbondo

Alamat Instansi

Universitas Ibrahimy, Situbondo,
Jl. KHR. Syamsul Arifin No. 1-3,
Sukorejo, Situbondo, Jawa Timur
68374

Bidang Keahlian

Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. 2019–sekarang: Dosen Tadris Matematika Universitas Ibrahimy, Situbondo
2. 2015–sekarang: Guru Matematika di MTs Raudlatul Hasanah, Pamekasan
3. 2016–2019: Guru Matematika di SMPN 2 Jember
4. 2005–2015: Guru Matematika di SMP Islam Sabilillah Malang

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S1 Pendidikan Matematika Universitas Islam Malang (UNISMA), 2000–2004
2. S2 Pendidikan Matematika Universitas Jember (UNEJ), 2016–2017
3. MAN Jungcangang, Pamekasan, 1997–2000
4. MTs Raudlatul Hasanah, Dempo Timur, 1994–1997
5. SD Negeri Dempo Timur 1, 1988–1994

Judul Buku dan Tahun Terbit

1. Matematika Diskrit: Teori dan Konsep, 2025
2. Buku Ajar Geometri Dasar Deep Learning, 2025
3. Matematika SMP/MTs Kelas VIII Kurikulum Merdeka, 2022
4. Buku Panduan Guru Matematika SMP/MTs Kelas VIII Kurikulum Merdeka, 2022
5. Matematika SMA/SMK Kelas XII Kurikulum Merdeka, 2022
6. Buku Panduan Guru Matematika SMA/SMK Kelas XII Kurikulum Merdeka, 2022

Judul Penelitian dan Tahun Terbit

1. Eksistensi Ilmu Faraidh untuk Meningkatkan Pemecahan Masalah Berdasarkan Kemampuan Matematis Mahasantri Ma'had Aly, 2025
2. The Urgency of Polya Model Problem-Solving on Students Mathematical Ability in Facing The Industrial Revolution 5.0, 2024
3. Wallas Model Problem-Solving to Identify Prospective Mathematics Teachers' Expectations of Students' Creative Thinking Processes, 2024
4. Comparison of The Performance Results of C4.5 and Random Forest Algorithm in Data Mining to Predict Childbirth Process, 2023
5. Analysis of Students' Understanding of Mathematical Concepts in The Faraid Calculation Using Modulo Arithmetic Theory, 2022

Informasi Lain dari Penulis

Google Scholar ID: c0s6OxUAAAAJ

<https://scholar.google.co.id/citations?user=c0s6OxUAAAAJ&hl=id>

Penulis



**Ahmad
Choirul Anam,
M.Pd.**

Email

choirulanam@ibrahimy.ac.id

Instansi

Universitas Ibrahimy, Situbondo

Alamat Instansi

Universitas Ibrahimy, Situbondo,
Jl. KHR. Syamsul Arifin No. 1-3,
Sukorejo, Situbondo, Jawa Timur
68374

Bidang Keahlian

Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Dosen Tadris Matematika Universitas Ibrahimy Situbondo, 2020–sekarang
2. Guru Matematika di SMA Negeri Purwoharjo Banyuwangi, 2020–sekarang
3. Guru Matematika di SMA Trimurti Surabaya, 2020–2021
4. Konsultan Pendidikan Ruangguru, 2018–2019

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S2 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Surabaya, Tahun 2017–2019
2. S1 Pendidikan Matematika di Universitas Islam Negeri Sunan Ampel Surabaya, Tahun 2012–2016
3. MAN Genteng Banyuwangi, Tahun 2009–2012
4. MTs Negeri Sidorejo Banyuwangi, Tahun 2006–2009
5. MI NU 2 Sidorejo, Tahun 2000–2006

Judul Buku dan Tahun Terbit

1. Pengantar Statistika, 2024
2. Manajemen Pendidikan di Era Transformasi Digital, 2024
3. Teori Bilangan, 2023
4. Buku Panduan Guru Matematika SMP/MTs Kelas VIII Kurikulum Merdeka, 2022
5. Matematika SMP/MTs Kelas VIII Kurikulum Merdeka, 2022
6. Buku Panduan Guru Matematika SMA/SMK Kelas XII Kurikulum Merdeka, 2022



Judul Penelitian dan Tahun Terbit

1. The Complexity of High School Students' Semiotic Graphics in Solving Statistical Problems, 2025
2. STEM-based mathematics learning module with PBL model in improving higher-order thinking skills, 2024
3. Wallas model problem-solving to identify prospective mathematics teachers 'expectations of students' creative thinking processes, 2024
4. The Effectiveness of Cooperative Learning Type Numbered Head Together (NHT) on Arithmetic Series and Sequence Material Learning Outcomes, 2023
5. Pengembangan Media *TaKeru* Sebagai Media Pembelajaran Berbasis Literasi Matematika, 2022
6. Abstraksi Reflektif Siswa Sekolah Menengah Pertama Pada Materi Segiempat dan Segitiga, 2021
7. Students' Mental Construction in Cube and Cuboid Concept Based on Mathematical Ability Differences, 2020

Penulis



**Ibnu Taufiq,
S.Pd, M.Pd.**

Email

taufiqibnu13@gmail.com

Instansi

SMP Bahrul Maghfiroh Malang

Alamat Instansi

Jl. Joyo Agung No.2 Malang, Jawa
Timur

Bidang Keahlian

Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. SD Islam Sabilillah (1997–2005)
2. SMP Islam Sabilillah (2005–2013)
3. SMP Bahrul Maghfiroh (2013–sekarang)
4. Tutor UT UPBJJ Malang (2009–sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. SD Negeri Candipuro, Lumajang, Tahun 1979–1985
2. SMP Negeri Candipuro, Lumajang, Tahun 1985–1988
3. SMA Negeri 2 Lumajang, Tahun 1988–1991
4. Sarjana(S1) Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang tahun 1991– 1995
5. Sarjana(S2) Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang tahun 2005– 2009

Judul Buku dan Tahun Terbit

1. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas 7 Kurikulum 2013 tahun 2016
2. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas 7 Kurikulum 2013 tahun 2016
3. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas 8 Kurikulum 2013 tahun 2017
4. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas 8 Kurikulum 2013 tahun 2017
5. Buku Siswa Matematika SMA Kelas 10 Kurikulum Merdeka tahun 2021
6. Buku Guru Matematika SMA Kelas 10 Kurikulum Merdeka tahun 2021
7. Buku Siswa Matematika SMP Kelas 8 Kurikulum Merdeka tahun 2022
8. Buku Guru Matematika SMP Kelas 8 Kurikulum Merdeka tahun 2022

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Tutor Lembaga Pendidikan Bintang Pelajar (2010–2013)
2. SMAN 1 Jakarta (2013–2019)
3. SMAN 44 Jakarta (2019–sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun belajar

1. SD Negeri Duren XIII Bekasi, Tahun 1994–1999
2. SMP Negeri 11 Bekasi, Tahun 2000–2002
3. SMA Negeri 1 Bekasi, Tahun 2003–2005
4. Sarjana(S1) Pendidikan Matematika Universitas Negeri Jakarta, Tahun 2006–2012
5. Sarjana(S2) Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia Bandung, Tahun 2013–2015

Judul Buku dan Tahun Terbit

1. Modul/Suplemen Bahan Ajar PJJ Kelas X Tahun 2021
2. Buku Antologi Sepenggal Cerita “Menjadi Wali Kelas Gen Z” Tahun 2022

Judul Publikasi Ilmiah

1. Peningkatan kemampuan Berpikir Kritis Matematis dan Self-Efficacy dengan Menggunakan Pendekatan Pembelajaran Creative Problem Solving Tahun 2021

Penulis



**Tista Imam
Riyadi, M.Pd.**

Email

tistaimamriyadi@gmail.com

Instansi

SMA Negeri 44 Jakarta

Alamat Instansi

Jl. Delima IV Perumnas Klender
Duren Sawit, Jakarta Timur

Bidang Keahlian

Pendidikan Matematika

Penelaah



**Dr. Kenys
Fadhilah
Zamzam,
S.Si., M.Pd**

Email

kenysfz@gmail.com

Instansi

Universitas Insan Budi Utomo

Alamat Instansi

Jl. Citandui No. 46 Malang, Jawa
Timur

Bidang Keahlian

Geometri dan Pendidikan

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Dosen Universitas Insan Budi Utomo
2. Instruktur Literasi Numerasi AKMI
Kemenag

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S1 Matematika Universitas Negeri
Surabaya Tahun 2010
2. S2 Pendidikan Dasar Konsentrasi
Matematika Universitas Negeri Malang
Tahun 2013
3. S3 Pendidikan Matematika Universitas
Negeri Malang Tahun 2023

Judul Buku dan Tahun Terbit

1. Etika Profesi Tahun 2024
2. Geometri Analitik Tahun 2023

Judul Penelitian dan Tahun Terbit

1. Divergent thinking in developing
mathematics assignment: Exploration
case of teacher candidate-students'
creativity Tahun 2024
2. The Creative Thinking Process of
Prospective Teachers in Developinng
Assignments Tahun 2023

Informasi Lain dari Penelaah

[https://scholar.google.com/
citations?user=hkGDee4AAAAJ&hl=id](https://scholar.google.com/citations?user=hkGDee4AAAAJ&hl=id)

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Dosen Tetap, Pend. Matematika Universitas Muhammadiyah Metro 2014–sekarang
2. Kepala Laboratorium Microteaching, Universitas Muhammadiyah Metro, 2016–2017
3. Kepala UPT PPL FKIP UM Metro, Universitas Muhammadiyah Metro, 2017–2019
4. Kepala Unit Publikasi Ilmiah (UPI) dan Sentra KI UM Metro, 2024–2025
5. Kepala Pusat Publikasi Ilmiah dan Kekayaan Intelektual UM Metro, 2025–sekarang

Riwayat Pendidikan dan Tahun belajar

1. SD Negeri 2 Pancakarsa Purnajaya, Tahun 1994–2000
2. SLTP Negeri 1 Banjar Agung, Tahun 2000–2003
3. SMA Negeri 1 Banjar Agung, Tahun 2003–2006
4. Sarjana(S1) di Universitas Muhammadiyah Metro, Tahun 2006–2010
5. Magister(S2) di Universitas Pendidikan Indonesia (UPI) Bandung, Tahun 2011–2013
6. Doktor(S3) di Universitas Negeri Malang, Tahun Lulus 2019–2024.

Penelaah



**Dr. Nego
Linuhung,
S.Pd., M.Pd.**

Email

Linuhung, S.Pd., M.Pd.

Instansi

Universitas Muhammadiyah
Metro

Alamat Instansi

Jl. Ki Hajar Dewantara, No. 116,
Kota Metro

Bidang Keahlian

Pendidikan Matematika

Judul Buku dan Tahun Terbit

1. Buku Panduan Microteaching Berbasis Lesson Study, 2017
2. Geometri Dasar Berbasis Penemuan Terbimbing, 2018
3. Logika, Himpunan, dan Relasi dan Fungsi Terintegrasi Nilai-Nilai Islam, 2025
4. Literasi Numerasi Berbasis Etnomatematika, 2025

Judul Penelitian dan Tahun Terbit

1. Exploring Students' Proportional Reasoning in Mathematical Literacy Problems: Functional and Scalar Relationship Strategies, Scopus Q3 tahun 2025.
2. Proportional Reasoning: Insights From Students' Early Attempts at Quantifying in Solving Mathematical Literacy Problems, Scopus Q3 tahun 2025.
3. Development of Ethnomathematics-Based Numeracy Literacy Questions in Peci Tapis Lampung, Peringkat Sinta 2 tahun 2025.
4. How Students Solve Pizza Problems: an Exploration of Students' Mathematical Literacy, Peringkat Sinta 2 tahun 2024.
5. Exploring students' proportional reasoning in mathematical literacy problem solving: recognition of multiplicative relationship strategies, Scopus Q2 tahun 2024.

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Editor dan Penulis Matematika CV Mediatama, Surakarta (2012–2020)
2. Editor Matematika PT Warna Mukti Grafika Boyolali (2021–2025)
3. Editor dan penulis buku/naskah lepas (2020–sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun belajar

1. SD Negeri Kandang sapi No. 140 Surakarta (1992–1998)
2. SMP Negeri 7 Surakarta (1998–2001)
3. SMA Negeri 4 Surakarta (2001–2004)
4. S1: Jurusan Matematika di Universitas Diponegoro Semarang (2004–2009)

Judul Buku dan Tahun Terbit

1. Buku Teks Pendamping Matematika Tingkat Lanjut Fase F untuk SMA/MA Kelas XI Tahun 2023.
2. Buku Teks Pendamping Matematika Fase E untuk SMA/MA Kelas X Tahun 2022.
3. Buku Teks Pendamping Ceria Belajar Matematika Fase A untuk SD/MI Kelas I Tahun 2022.
4. Buku Siswa Matematika X untuk SMA/MA/SMK Kelas X (Wajib) Kurikulum 2013 Seri HOTS (Berbasis Buku Proses) Tahun 2017.
5. Buku Siswa Matematika 4 untuk SD/MI Kelas IV Tahun 2016.
6. Buku Siswa Matematika X untuk SMA/MA Kelas X Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam Kurikulum 2013 (Edisi Revisi) Tahun 2016.

Editor



**Putri
Estikarini,
S.Si.**

Email

rilyozap@gmail.com

Bidang Keahlian

Penyunting dan penulis buku/
naskah

Editor



**Sofia Nida
Khoerunnisa**

Email

khoerunnisasofia@gmail.com

Instansi

Pusat Perbukuan,
Kemendikdasmen

Alamat Instansi

Jalan RS. Fatmawati Gd D
Kemendikbudristek Cipete,
Jakarta 12410

Bidang Keahlian

Penyuntingan Naskah

Riwayat Pekerjaan/Profesi

2022 – sekarang : Pusat Perbukuan,
Kemendikdasmen

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. S1 Pendidikan Matematika – Universitas Siliwangi (2019)
2. S2 Pendidikan Matematika – Universitas Siliwangi (2021)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit

1. *Analisis Kemampuan Penalaran Induktif Matematik Peserta Didik Ditinjau dari Gaya Belajar Silver-Hanson*, Journal of Authentic Research on Mathematics Education (JARME), 2020.
2. *The Student Achievement assisted Edmodo: An Alternative to Online Learning in Pandemic Era*, Edumatika: Jurnal Riset Pendidikan Matematika, 2020.
3. *Pengembangan Digibook Trigonometri Berbasis Flip PDF untuk Mengeksplor Kemampuan Koneksi Matematis*, Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika, 2021.

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Creative Director, Thinkin Studio (2019–sekarang)
2. Konsultan Komunikasi Visual, Ditjen PAUD, Dikdas, dan Dikmen, Kemendikbudristek (2022–2024)
3. Koordinator tim pengolah naskah Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh (2020–2021)
4. Staf pada Pusat Analisis dan Sinkronisasi Kebijakan (PASKA) Kemendikbud (2019–2020)
5. Staf pada Staf Ahli Mendikbud bidang pembangunan karakter (2018–2019)
6. Multimedia Designer, Cita Rasa Prima Indonesia Berjaya (2016–2018)
7. Intern Junior Art Director di Syafa'at Marcomm (2014)

Riwayat Pendidikan dan Tahun belajar

1. S-1: Desain Komunikasi Visual, Institut Teknologi Nasional Bandung (2011–2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit

1. Dicky Susanto dkk. (2023) *Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)*
2. Dicky Susanto dkk. (2021), *Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*, Kemdikbud, Jakarta
3. Dicky Susanto dkk. (2021), *Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK Kelas X*, Kemdikbud, Jakarta

Editor Visual



**M. Firdaus
Jubaedi**

Email

muhafir@gmail.com

Instansi

Thinkin Studio

Alamat Instansi

Jl. Permai 24 No. 9 Desa
Mekarrahayu Kecamatan
Margaasih Kab. Bandung

Bidang Keahlian

Desain Grafis, UI/UX Desain

- 
4. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
 5. Direktorat SMP (2021), *Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK, dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
 6. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
 7. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
 8. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta
 9. Direktorat Pembinaan PAUD (2019), *Panduan Praktis Penguatan Pendidikan Karakter pada Pendidikan Anak Usia Dini*, Kemdikbud, Jakarta
 10. Direktorat Pembinaan PAUD (2019), *Pedoman Penguatan Pendidikan Karakter pada Pendidikan Anak Usia Dini*, Kemdikbud, Jakarta

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Talent organizer Naoon Animation Studio (2018)
2. Indonesia Sinema Persada: Freelancer ilustrator movie poster (2018–2019)
3. Aaska Productions: Illustrator (2019–2022)
4. Tiger Wong Animation: Concept artist (2022–2023)
5. Hotpot Cinema: Ilustrator (2024–sekarang)

Riwayat Pendidikan dan Tahun belajar

1. (2010–2013) SMAN 1 Ciruas
2. (2013–2017) TELKOM UNIVERSITY S1-DKV

Buku yang Pernah Diilustrasikan

1. Best Mommy Ecer (2018)
2. My Little Big Brother (2018)
3. Rumah Terbaik Umama – TIGA ANANDA (2018)
4. Di Mana Ibu? – GLN Kemendikbud (2019)
5. Kumpulan Kisah Binatang dan Suara BISING – TIGA ANANDA (2020)
6. Series “Yuk Belajar Kalimat Thayyibah!” – el-Hana (2020)
7. Bermain Sapintrong, Yuk! – GLN Kemendikbud (2023)
8. Allah Tuhan Kita Semua – el-Hana (2024)
9. Hobi yang Merepotkan – SIBI Kemendikdasmen (2024)
10. THE BIG SIS CRISIS – Homely Hammock (2024)
11. Dani Akhirnya Tahu – Seri 7 KAIH – Direktorat Guru PAUD dan PNF Kemendikdasmen (2025)

Ilustrator



**Muhammad
Yustiadi
Akmaludin**

Email

yustiadi27@gmail.com

Bidang Keahlian

Ilustrator

Desainer



Erwin

Email

erwinwienk2025@gmail.com

Bidang Keahlian

Desainer

Riwayat Pekerjaan/Profesi

1. Freelancer CV. Eka Prima Mandiri (2016–Sekarang)
2. Freelancer Yudhistira (2015–2017)
3. Freelancer Pusat Perbukuan (2014–Sekarang)
4. Freelancer Agro Media Group (2013–2019)
5. Layouter CV. Bintang Anaway Bogor (Penerbitan, 2012–2014)
6. Layouter CV. Regina Bogor (Percetakan dan Penerbitan, 2004–2012)

Riwayat Pendidikan

SMA

Buku yang Pernah Didesain

1. Buku Teks Matematika Kelas IX
Kemdikbudristek
2. Buku Teks Matematika Kelas X
Kemdikbudristek
3. SBMPTN 2014
4. TPA Perguruan Tinggi Negeri & Swasta
5. Matematika Kelas 7 CV. Bintang Anaway
6. Buku Teks Matematika Peminatan Kelas X
SMA/MAK Kemdikbudristek